I 24767

2022

CTU R104

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

APARE LA 15 A FIECĂREI LUNI

VOLUMUL XIII.

ANUL 1933 — 1934

BIBLIOTECA SIBIU

TIMIȘOARA
INSTITUT DE ARTE GRAFICE „TIPOGRAFIA ROMANEASCĂ"
1934

1990

'05

IAN 2014

I 24767

ANUL XIII. 15 MARTIE 1933 No. 1.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. CEZAR COSNIȚA O TEOREMA RELATIVA LA CONICE
2. NOTE MATEMATICE: 1, 2.
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME AMUZANTE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 753 1117.
6. PROBLEME PROPUSE: 1177–1184
7. INFORMATIUNI

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

TIMISOARA
Institut de Artegrafice „Tipografia Românească"

2461

Avem plăcerea a anunța că începând dela 15 Martie 1933, mai face parte dintre membrii „Revistei Matematici din Timișoara“ și *D-l Ghițescu Spiridon*, profesor secundar, Mizil.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci** – profesor Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Școala Politechnică din Timișoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timișoara“ este pentru anul XIII, de 200 (două sute) lei

---

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XII inclusiv, broșate, 120 lei fiecare

---

REVISTA MATEMATICĂ DIN TIMIŞOARA,

APARE SUB CONDUCEREA UNUI COMITET COMPUS DIN:

1. **Abason E.** Inginer, Doctor în Matematici, Justinian 20, Bucureşti.
2. **Abramescu N.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
3. **Adam D. R.** Sublt. de geniu, str. M. Cogălniceanu 31, Bucureşti.
4. **Adamescu M.** Licenţiat în Matematici, Inspector Financiar, str. Flondor 37, Cernăuţi.
5. **Alaci V.** Doctor în Matematici, Profesor la Şc. Politechnică Timişoara.
6. **Anastasiade I.** Inginer, Profesor de Material Rulant de cale Ferată, inzestrarea căilor ferate, intinderea exploatării la Şc Polit., Timişoara.
7. **Andronescu P.** Doctor Inginer, Profesor de Electrotechnică la Şc. Polit., Timişoara.
8. **Angelescu A.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Bucureşti.
9. **Angheluţă Th.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
10. **Ardeleanu Şt** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Maşini Termice.
11. **Arghir I.** Profesor la Liceul din Tg.-Jiu.
12. **Bakony C.** Inginer, Profesor de Technologie.
13. **Balazs D.** Inginer, Asistent la Şc. Politechnică, str. Gen. Joffre 12, Timişoara.
14. **Bănărescu M.** Inginer la Atelierele C. F. R., Profesor şi Decan la Politechnică, str Doja 51, Timişoara.
15. **Banciu I.** Prof., Dir General al Contabilităţii în Ministerul de Instrucţie, str. Lucaci 95, Bucureşti.
16. **Bărglăzan A.** Inginer Asistent pe lângă catedra de Electrotechnică.
17. **Baron C.** Asistent la catedra de Fizică, Şc. Politechnică, Timişoara.
18. **Blaşian V.** Inginer de Mine, Rector al Şc. Politechnice, din Timişoara.
19. **Bobârnac M.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Maşini Termice.
20. **Botez M.** Profesor la Şc Normală şi liceul Milit. str. Speranţei 12, Iaşi.
21. **Bratu Gh.** Doctor în Matematici, Profesor la Universitatea din Cluj.
22. **Breazu D.** Profesor la Liceul din Caracal.
23. **Buicliu Gh.** Colonel de Artilerie. Fost 10 ani Profesor de Geometria Analitică la Şcoala Politechnică din Timişoara. Ministerul Apărării Naţionale, Direcţia Armamentului, str. Dr. Lister 5, Bucureşti.
24. **Călniceanu C.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Organe de Maşini Conferenţiar.
25. **Cândea C.** Doctor-inginer, Profesor şi membru în Comitetul de Direcţie, la Şc. Politechnică din Timişoara.
26. **Catona V.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Măsuri Electrice.
27. **Coca A.** Licenţiat în Litere, Lector de limba Engleză.
28. **Coman A.** Profesor Lic. C. Diaconovici-Loga Conferenţiar la Şc. Politechnică, str. Feldioara 1, Timişoara.
29. **Constantinescu Gh.** Profesor, lic. Lazăr, Bucureşti.
30. **Contrea A.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Asistent pe lângă catedra de Mineralogie şi Petrografie.
31. **Costăchescu D. C.** Sub-Lt de Marină, Constanţa.
32. **Cristescu I.** Inginer, Profesor la Şc. Politechnică, Timişoara.
33. **Cristodulo N.** Licenţiat în Chimie, Asistent pe lângă catedra de Chimie.
34. **Cserveny I.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Centrale Electrice.
35. **Demetrescu Gh.** Doctor în Matematici, Prof. la Universitatea din Cluj.
36. **Diaconescu N.** Profesor, Lic. din Slatina.
37. **Dumitriu-Dada** Profesor, lic. Craiova
38. **Florescu M.** Inginer Inspector Silvic, str. A. Orescu 9, Bucureşti.
39. **Frătici I.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Cazane, Şc. Politechnică Timişoara.
40. **Georgescu D.** Profesor la Liceul din Piteşti, str. Negru-Vodă 14, Piteşti.
41. **Ghermănescu M.** Profesor la Liceul Cantemir, str. Popa Nan 79, Bucureşti.
42. **Ghiţescu Spiridon** Profesor secundar, Mizil.
43. **Hristea H.** Inginer la dep. C. F. R.
44. **Ionescu C-tin Bujor** Licenţiat în Matematici, str. General Al. Radovici 5, Bucureşti.
45. **Iorgulescu T.** Licenţiat în Ştiinţe, Asistent pe lângă catedra de Geologie.
46. **Lambrino Gh.** Doctor în Drept şi Economie Politică, Conferenţiar de Economie Politică şi Legislaţie Industrială.
47. **Laţiu V.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor de Geologia Zăcămintelor.
48. **Leonida D.** Inginer, Prof. la Şc. Politechnică, str. Sălcii 11, Bucureşti.

49. **Linteş. I.** Căpitan de Artilerie, str. Epicol 49, Bucureşti.

50. **Liteanu Gh.** Colonel în Artilerie, Alea Sevastopol 27, Bucureşti.

51. **Lupan A.** Inginer, Prof. la Şc. Politechnică.

52. **Magheru I.** Doctor în Ştiinţe, Prof. la Şc. Politechnică, Timişoara.

53. **Manughevici C.** Inginer-chimist, şef de Lucrări la Şc. Politechnică, str. Paul Chinezul 7, Timişoara.

54. **Mardan D.** Inginer-şef, directorul Fabricei de tutun, Prof. la Şc. Politechnică din Timişoara.

55. **Mateescu Ş.** Doctor în Ştiinţele Naturale, Profesor de Mineralogie şi Petrografie.

56. **Mihaiu Emil** Profesor Şc. Comercială Timişoara şi Actuar Matematici, Diplomat.

57. **Miloia I.** Doctor în Litere şi Istoria Artelor, Asistent pe lângă catedra de Geometrie Discriptivă.

58. **Mioc V.** Profesor la Liceul Diaconovici-Loga, Timişoara şi Asistent la catedra de Analiză, la Şc. Politechnică, Timişoara.

59. **Nadaşan St.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Rezistenţa Materialelor.

60. **Naneş Gh.** Profesor la Lic. Sf. Sava, Bucureşti.

61. **Niculescu Gh.** Căpitan, Inginer, str. Izvor 98, Bucureşti.

62. **Niculescu Miron.** Doctor în Matematici, profesor la Universitatea din Cernăuţi, str. Paris 14, Bucureşti.

63. **Nichifor Gh.** Doctor în Matematici, Conferenţiar la Universitatea din Bucureşti, str. Racoviţă 32, Bucureşti.

64. **Nicolau A.** Inginer, Prof. la Şc. Politechnică, Uzină Electrică, Craiova.

65. **Nicolau P.** Inginer, Profesor la Şc. Politechnică, Timişoara.

66. **Onicescu O.** Profesor Universitar, Clopotarii-vechi 25, Bucureşti.

67. **Orăşeanu C.** Inginer-şef, Licenţiat în Matematici, Prof. la Şc. Politechnică, Bucureşti.

68. **Orăşeanu Gr.** Profesor la Liceul Sf. Petru şi Pavel, Ploeşti.

69. **Petrescu A.** Doctor în Matematici, Directorul Academiei Agricole, Cluj.

70. **Popescu E.** Doctor în Chimie dela Sorbona, Profesor la Şc. Politechnică, Bucureşti.

71. **Popescu I.** Inginer, Profesor de Maşini Miniere şi Decan la Şc. Polit, Timişoara.

72. **Protopopescu I.** Inginer-şef, Prof. la Şc. Politechnică, din Timişoara.

73. **Purcariu I.** Director General, Ministerul de Instrucţie Publică, Bucureşti.

74. **Racliş N. R.** Conferenţiar la Şc. Politechnică din Bucureşti.

75. **Roibănescu C.** Profesor, Bucureşti.

76. **Saegiu E.** Inginer-şef, Serv. Constr. C. F. R. str. Berzei 70, Bucureşti.

77. **Sauciuc L.** Licenţiat în Chimie, Asistent pe lângă catedra de Chimie,

78. **Schileru I.** Inginer, Conferenţiar de Electrotechnică şi Aplicaţiile Electricităţii în Mine, Directorul Şc. P. T. T. din Timişoara.

79. **Sergescu P.** Doctor în Matematici, Licenţiat în Filozofie, Prof. la Universitatea din Cluj.

80. **Severineanu C.** Inginer-şef, Subdirectorul Serviciului tractiunei C. F. R, Prof. la Şc Politechnică, Timişoara.

81. **Smighelschi O.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Electrotechnică.

82. **Stambuleanu A.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Termodinamică şi Fizică Industrială.

83. **Stăncescu C.** Doctor-Inginer Prof. la Şc. Politechnică Timişoara.

84. **Stantzel E.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Construcţii.

85. **Ştefănescu O.** Inginer, Asistent pe lângă catedra de Maşini Miniere şi Topografie.

86. **Stoicescu L.** Inginer, Conferenţiar la Elemente de Maşini şi Cursul General de Maşini.

87. **Stoicescu M.** Profesor, str. Zefirului 4, Bucureşti.

88. **Teodorescu C.** Inginer-şef, Profesor la Şc. Politechnică, Timişoara.

89. **Teodosiu A.** Doctor în Matematici, Profesor la Academia de Agricultură, Cluj.

90. **Ţino O.** Doctor în Matematici, Prof. la Şc. Politechnică, Timişoara.

91. **Vâlcovici V.** Doctor în Matematici, Prof. la Universitatea din Bucureşti, str. Londra 44.

92. **Vasiliu Leoben Gh.** Inginer-geodet., Str. Eminescu 22. Bucureşti

93. **Vlad I. V.** Inginer-arhitect, Profesor la Şc. Politechnică, str. Traian Lalescu 1, Timişoara.

94. **Zăgănescu I.** Inginer, Conferenţiar de Calculul Grafic şi Vectorial Şc. Politechnică, Timişoara.

95. **Zapan Gr.** Căpitan-aviator. Inginer diplomat al Şcoalei Superioare de Aeronautică şi Construcţii Mecanice din Paris. Profesor la Şcoala Pregătitoare de Ofiţeri, Bucureşti, str. Maior Ene 12. Telefon 3.18—77.

ANUL XIII — No 1. TIMISOARA, 15 MARTIE 1933

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie.

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Şcoala Politechnică din Timişoara.

O TEOREMĂ RELATIVĂ LA CONICE

de CEZAR COSNITA
Licenţiat în Matematică, Bârlad.

Intr'o conică (C) se ia o coardă fixă A B, iar pe conică se iau perechi de puncte variabile α, β aşa fel ca dreptele A α, A β să fie simetrice faţă cu A B.

1. *Coarda* A B *rămânând fixă, iar punctele* α, β *variind pe conica* (C) *aşa fel ca dreptele* A α, A β *să rămână necontenit simetrice faţă de* A B, *dreapta* $\alpha\beta$ *trece printr'un punct fix* M.

2. *Dacă punctul* A *rămâne fix pe conica* (C), *iar punctul* B *desc ie această conică, punctul* M *descrie o dreaptă* (Δ).

3. *Dacă şi punctul* A *variază pe conica* (C), *dreapta* (Δ) *înfăşoară o conică.*

Voi soluţiona mai întâi geometric această chestiune, apoi pe cale analitică.

Dacă iau arbitrar punctul α pe conica (C) şi-l unesc cu A, am dreapta A α; luând dreapta A β simetrică cu A α faţă de A B, am făcut să corespundă dreptei arbitrare A α o dreaptă unică A β. Aşadar unei drepte arbitrare A α îi putem face să corespundă, în modul de mai sus, o dreaptă unică A β. Evident că, în acelaş fel, vom putea face să corespundă unei drepte A β, o dreaptă unică A α.

Coeficienţii unghiulari ai dreptelor A α, A β sunt legaţi printr'o relaţie algebrică, căci notând cu λ, μ coeficienţii unghiulari ai acestor două drepte, iar cu m coeficientul unghiular al dreptei A B, avem succesiv:

$$(\widehat{A\alpha, AB}) = (\widehat{AB, A\beta})$$

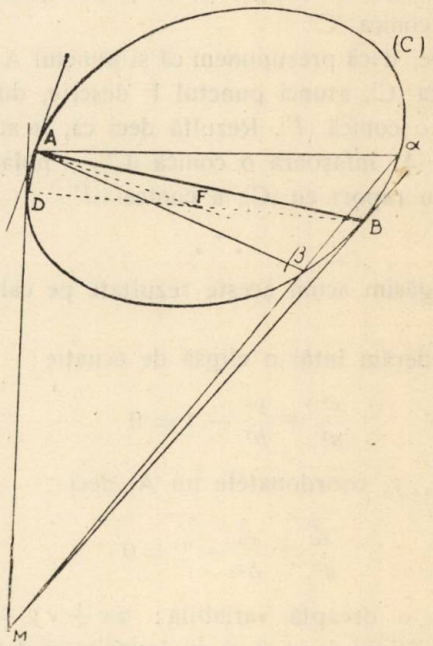
$$\therefore \quad \operatorname{tg}(\widehat{A\alpha, AB}) = \operatorname{tg}(\widehat{AB, A\beta})$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg}(\widehat{A\alpha, AB}) + \operatorname{tg}(\widehat{A\beta, AB}) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{m-\lambda}{1+m\lambda} + \frac{m-\mu}{1+m\mu} = 0$$

$$\therefore \quad (m^2-1)(\lambda+\mu) + 2m(1-\lambda\mu) = 0.$$

Deci dreptele A α, A β descriu două fascicole omografice cu vârful în A. Mai mult, fie că am considera pe A α ca aparţinând primului fascicol, fie că am considera-o ca aparţinând celuilalt fascicol,



ei îi corespunde, în ambele cazuri, aceaşi omoloagă A β. Deci A α, A β descriu două fascicole involutive — ceace dealtfel se vede şi din relaţia dintre coeficienţii lor unghiulari — scrisă mai sus.

Dacă intersectăm razele omoloage ale acestor două fascicole cu o conică (C) trecând prin A, dreapta $\alpha\beta$, care uneşte aceste intersecţii, trece printr'un punct fix M — conform teoremei lui *Frégier.*

Ca să precizăm poziţia punctului M, să căutăm punctele duble ale involuţiei determinate de punc-

tele α, β pe conica (C). Aceste două puncte sunt la intersecţia conicei (C) cu razele duble ale celor două fascicole involutive.

Ori, aceste raze duble sunt A B şi perpendiculara în A pe ea, care tae conica (C) în D.

Punctele B, D sunt punctele căutate. Tangentele în aceste puncte la (C) se intersectează tocmai în punctul M. Dreapta B D este deci polara punctului M faţă de conica (C).

Dacă acum presupunem că punctul B variază pe conica (C), atunci şi punctul D variază pe conica C), unghiul B A D rămânând necontenit drept. Se ştie că în acest caz dreapta B D trece printr'un punct fix F — punctul lui *Frégier* relativ la punctul A — situat pe normala în A la conica (C).

Rezultă, după proprietăţile polului şi polarei, că dacă punctul B descrie conica (C), atunci punctul M descrie o dreaptă (Δ) — polara punctului F faţă de conica (C).

In fine, dacă presupunem că şi punctul A variază pe conica (C), atunci punctul F descrie, după cum se ştie, o conică (I'). Rezultă deci că, în acest caz, dreapta (Δ) înfăşoară o conică (C') — polara reciprocă, în raport cu (C), a conicei (I').

* * *

Să regăsim acum aceste rezultate pe cale analitică.

Considerăm întâi o elipsă de ecuaţie:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0\,.$$

Fie x_0, y_0 coordonatele lui A, deci:

$$(1)\qquad \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1=0\,.$$

Luăm o dreaptă variabilă: $ux+vy+w=0$, care tae elipsa în α, β şi să dovedim că dacă dreptele A α, A β sunt simetrice faţă cu dreapta fixă A B, atunci dreapta considerată trece printr'un punct fix.

Să scriem ecuaţia ansamblului celor două drepte A α, A β. Pentru aceasta mutăm origina axelor în punctul A şi atunci ecuaţiile elipsei şi dreptei se scriu:

$$\frac{(x+x_0)^2}{a^2}+\frac{(y+y_0)^2}{b^2}-1=0\,,$$

$$u(x+x_0)+v(y+y_0)+w=0\,.$$

(Am notat tot cu x, y coordonatele faţă de noul sistem de axe.)

Sau, ţinând seama de (1), avem:

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+2\left(\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}\right)=0\,,$$

$$ux+vy+ux_0+vy_0+w=0\,.$$

Făcând omogene aceste două ecuaţii, avem:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+2\left(\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}\right)z=0$$

$$ux+vy+(ux_0+vy_0+w)z=0\,.$$

Eliminând variabila de omegeneitate, vom obţine ecuaţia ansamblului celor două drepte A α, A β, anume:

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)(ux_0+vy_0+w)-$$

$$2\left(\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}\right)(ux+vy)=0\,.$$

Impărţind cu x^2 această ecuaţie şi punând;

$$\frac{y}{x}=\alpha\,,$$

avem o ecuaţie de gradul al II-lea în α, care dă coeficienţii unghiulari ai celor două drepte A α, A β:

$$\frac{1}{b^2}(ux_0-vy_0+w)\alpha^2-2\left(\frac{vx_0}{a^2}+\frac{uy_0}{b^2}\right)\alpha+$$

$$\frac{1}{a^2}(vy_0-ux_0+w)=0\,.$$

Rădăcinile acestei ecuaţii sunt λ, μ, deci:

$$\lambda+\mu=\frac{2\left(\frac{vx_0}{a^2}+\frac{uy_0}{b^2}\right)}{\frac{1}{b^2}(ux_0-vy_0+w)}\,,$$

$$\lambda\mu=\frac{\frac{1}{a^2}(vy_0-ux_0+w)}{\frac{1}{b^2}(ux_0-vy_0+w)}\,.$$

Ca să scriem că dreptele A α, A β sunt simetrice faţă cu A B, vom elimina pe λ, μ între aceste două relaţii şi acea dintre λ, μ pe care am scris-o mai înainte.

Făcând eliminarea şi efectuând toate calculele, obţinem condiţia:

$$u\,\frac{a^2 b^2 (m^2-1) y_0 + (a^2+b^2) m x_0}{m c^2} +$$

$$v\,\frac{b^4 (m^2-1) x_0 - (a^2+b^2) m y_0}{m c^2} + w = 0\,,$$

în care: $c^2 = a^2 - b^2$.

Aceasta exprimă că dreapta $u x + v y + w = 0$, adică $\alpha\beta$, trece printr'un punct fix M, ale cărui coordonate, față cu sistemul inițial de axe, au expresiile:

$$X = \frac{a^2 b^2 (m^2-1) y_0 + (a^2+b^2) m x_0}{m c^2}$$

$$Y = \frac{b^4 (m^2-1) x_0 - (a^2+b^2) m y_0}{m c^2}$$

S'ar putea verifica că în adevăr acesta e punctul M a cărui construcție am indicat-o în prima soluție. Dar aceasta va rezulta când vom demonstra că — m variind — punctul M descrie polara punctului F, față de conica (C), aceasta în baza proprietăților *polarelor reciproce.*

Dacă eliminăm pe m între expresiile lui X, Y găsim locul punctului M, când m variază.

Rezultatul eliminării este:

$$\frac{X - \frac{a^2+b^2}{c^2} x_0}{a^2 y_0} = \frac{Y + \frac{a^2+b^2}{c^2} y_0}{b^2 x_0},$$

care, după ce facem calculele, devine:

$$(2') \qquad \frac{x_0 X}{a^2} - \frac{y_0 Y}{b^2} - \frac{a^2+b^2}{c^2} = 0\,.$$

Se recunoaște că aceasta e polara punctului lui *Frégier*, dacă ținem seamă că acest punct are drept coordonate:

$$x = \frac{c^2 x_0}{a^2+b^2}\,, \qquad y = -\frac{c^2 y_0}{a^2+b^2}\,.$$

Pentru a găsi înfășurătoarea dreptei (2'), sau a dreptei:

$$(3) \qquad \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} - \frac{a^2+b^2}{c^2} = 0\,,$$

vom elimina pe x_0, y_0 între (1), (3) și relația ce se obține scriind că derivatele expresiilor din (1) și (3) în raport cu x_0, y_0 sunt proporționale, adică:

$$\frac{\frac{x}{a^2}}{\frac{x_0}{a^2}} = \frac{-\frac{y}{b^2}}{\frac{y_0}{y^2}},$$

sau:

$$\frac{x}{x_0} = -\frac{y}{y_0}\,.$$

Rezultatul eliminării este ecuația:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \left(\frac{a^2+b^2}{c^2}\right)^2 = 0\,,$$

adică o elipsă omotetică cu cea dată.

Teorema e deci complect demonstrată pentru elipsă.

Pentru hiperbolă e deajuns să înlocuim peste tot pe b^2 cu $-b^2$.

Pentru parabola:

$$y^2 - 2 p x = 0\,,$$

calculele sunt ceva mai simple.

Coordonatele lui M sunt:

$$X = \frac{(m^2-1) y_0 + m (x_0 - 2p)}{m}$$

$$Y = -\frac{(m^2-1) p + m y_0}{m}$$

Ecuația lui (Δ) este:

$$y_0 y + p (x + x_0 + 2p) - 0\,,$$

iar înfășurătoarea lui (Δ) e parabola:

$$y^2 - 2 p (x + 2p) = 0.$$

Observare. Corespondența involutivă dintre dreptele A α, A β e o involuție particulară. In adevăr, dreptele A α, A β sunt conjugate armonic față de A B, A D, cari în cazul de față sunt și perpendiculare. Teorema (primul punct) subsistă când înlocuim dreptele perpendiculare A B, A D cu două drepte fixe oarecare, iar perechile de drepte simetrice A α, A β prin perechi de drepte conjugate armonic față de A B, A D. Corespondența involutivă se menține și în acest caz, teorema lui *Frégier* se aplică deasemenea, deci dreapta $\alpha\beta$ trece printr'un punct fix M.

Dacă am presupune că, în acest caz, punctele B, D descriu conica (C), dar așa fel ca unghiul B A D să rămână constant, se știe că dreapta B D învălue o conică (γ), deci punctul M va descrie o conică (g) — polara reciprocă a conicei (γ) față cu (C).

Ar fi de văzut care e înfășurătoarea conicei (g), când punctul A descrie conica (C).

NOTE MATEMATICE

1. — *Simson şi Simpson.*

In articolul de la pagina 121, vol. XII s-a strecurat o eroare de tipar, anume: s-a imprimat *Simpson* în loc de *Simson.* Relevând această eroare de tipar informez pe tinerii noştri corespondenţi că între aceşti doi matematicieni a fost nu numai diferenţă de nume, dar şi de preocupări.

Robert Simson (1687—1768) a fost preocupat de chestiuni de geometrie. Lui i se datorează între altele un *Tratat asupra secţiunilor conice.* In particular, dreapta care face obiectul articolului de la pagina citată, poartă numele de dreapta lui *Simson.*

Thomas Simpson (1710—1761) a avut predilecţie mai mult pentru chestiunile de trigonometrie, unde se întâlnesc formulele care poartă numele de formulele lui *Simpson.* Din chestiunile de geometrie, l-a preocupat în special problemele de cuadratură.

COL. GH. BUICLIU

2. — *O clasă de inegalităţi.*

In cele de mai jos, voiu căutà să arăt cum, prin demonstrarea unei chestiuni de maxim sau minim, se poate deduce o întreagă clasă de înegalităţi.

Imi propun a arăta că: *Dacă, egalând variabilele într'o funcţie simetrică de mai multe variabile căpătăm o constantă, maximul sau minimul acestei funcţiuni are loc când variabilele sunt egale.*

Variabilele fiind $x_1, x_2, \ldots x_n$, funcţia simetrică care îndeplineşte condiţiile din enunţ, şi a cărei maxim sau minim îl căutăm, fie $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Pentru demonstraţie, să admitem că ar exista între variabile relaţia de legătură tot simetrică $f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$.

Conform rezultatelor obţinute în nota 8, anul VIII, R. M. T., maximul sau minimul funcţiunei date, are loc când variabilele au valori egale.

In cazul general, ar trebui, ca din funcţia de legătură să scoatem valoarea maximă sau minimă a variabilelor şi înlocuind'o în funcţia dată, să aflăm valoarea maximă sau minimă a aceştia.

Ţinând seama de ipoteza din enunţ — prin egalarea variabilelor din funcţia simetrică căpătăm o constantă — maximul sau minimul funcţiunei date e independent de presupusa relaţie de legătură, şi are ca valoare însăşi constanta găsită.

Cu alte cuvinte, nu avem nevoe de o relaţie de legătură între variabile, pentruca — în condiţiile problemei — maximul sau minimul să aibă loc pentru valori egale ale variabilelor.

*

Bazându-ne pe cele de mai sus, putem stabili o serie de inegalităţi interesante, totul reducându-se la a construi funcţiui simetrice, în care egalând variabilele să căpătăm o constantă.

Expresia:

$$\frac{x_1^{m+p} + x_2^{m+p} + \ldots + x_n^{m+p}}{x_1 x_2 \ldots x_n (x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p)},$$

indeplinind condiţia care ne-am impus'o, va fi minimă pentru $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ şi valoarea minimă e 1; pentru $m = 3$ şi $p = 1$ aflăm inegalitatea:

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \geqq x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3),$$

stabilită în Culegere de probleme I. T. I. C.

La fel stabilim şi inegalitatea:

$$\frac{(x_1^m + x_2^m + \ldots x_n^m)(x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p)}{(x_1+x_2)^{m+p} + \ldots (x_1+x_3)^{m+p} + \ldots + (x_1+x_n)^{m+p}} \geqq \frac{n^2}{(n-1)2^{m+p}}$$

In mod analog găsim inegalitatea:

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3 + \ldots + x_n} + \frac{x_2}{x_1 + x_3 + \ldots + x_n} + \ldots \frac{x_n}{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}} \geqq \frac{n}{n-1},$$

care pentru $n = 3$ devine:

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_3}{x_1 + x_2} \geqq \frac{3}{2},$$

inegalitate care face obiectul problemei 3478 G. M.

Deasemenea inegalitatea uşor de stabilit:

$$\frac{\sum_1^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n \frac{(x_1 x_2 \ldots x_n)}{x_i}}{x_1 x_2 \ldots x_n} \geqq n^2,$$

pentru $n = 3$ devine:

$$(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) \geqq 9 x_1 x_2 x_3,$$

relaţie care face obiectul unei probleme propusă în R. M. T.

In mod analog se poate stabili o întreagă clasă de inegalităţi.

ING. CONST. STAN

PROBLEME AMUZANTE.

1. 5 oameni trebue să împartă între ei 5 mere, astfel ca fiecare să aibă câte un măr, şi un măr să rămâe în coş. Cum s'o facă?

R. Ultimul ia coşul cu cel din urmă măr.

2. 3 vânători trebue să împartă între ei 4 iepuri, astfel ca nici-unul să nu ia mai mult decât cei care iau înaintea lui. Cum s'o facă?

R. Primul ia 2 iepuri, al 2-lea 1 iepure al 3-lea tot 1 iepure.

3. 7 ţărani împart între ei 28 de saci cu cartofi. Primul e tare în împărţire. El zice: „28 : 7; 7, în 8 odată, rămâne 1; cobor 2 şi am 21, 7 în 21, de 3 ori, deci, fiecare ia câte 13 saci". Al doilea face proba prin înmulţire: „13×7, 3 ori 7 face 21; 1 ori 7 face 7, şi cu 21, 28: socoteala a fost bine făcută." Al 3-lea nu se pricepe la inmulţire şi împărţire, ci vrea să adune părţile tuturora: $13+13+13+13+13+13+13$, adică: $3+3+3+\ldots+3$, face $21: 1+1+1+\ldots+1$, face 7; 21 şi 7 face 28. Prin urmare, fiecare trebue să ia câte 13 saci'.

4. Cineva cumpără un cuţit. Ii plac cu deosebire două: unul costă 15 lei, altul 30 lei. Pentru motive de economie, el cumpără primul cuţit, îl plăteşte şi pleacă. A 2-a zi el revine: el vrea să cumpere cuţitul care costă 30 lei; el ia cuţitul cel scump, restitue negustorului cuţitul cel ieftin şi vrea să plece. Negustorul îl opreşte: el trebue să plătească o diferenţă. Dar clientul răspunde: „Eri ţi-am plătit D-tale 15 lei, azi îţi dau un cuţit care costă 15 lei. D-ta mi-ai dat un cuţit care costă tocmai 30 lei, prin urmare, suntem în regulă". Are el dreptate?

5. Un ceas bate ora 6 în timp de 6 secunde. Cât timp va bate el ora 12.

R. Trebue observat că între 6 bătăi sunt 5 intervale, iar între 12 bătăi 11 intervale, adică, *mai mult* decât dublu.

6. 12 lucrători trebue să transporte 12 saci cu cartofi dela sat la oraş. Fiecare nu poate duce mai mult decât un singur sac. Ei termină transportul în 12 ore. In cât timp vor face aceeaşi treabă 6 lucrători.

R. Trebue observat că şi întoarcerea dela oraş la sat cere un anume timp.

7. Avem 2 pahare cu vin, primul cu vin alb, al 2-lea cu vin roşu. Luăm o linguriţă plină din paharul cu vin alb, o vărsăm în celălalt pahar, amestecăm. Luăm o linguriţă plină din paharul cu amestec, o vărsăm în paharul cu vin alb. Este mai mult vin roşu în cel alb sau mai mult vin alb în roşu?

R. La fel.

8. Să se scrie 100 cu ajutorul tuturor cifrelor, dela 0 până la 9 înclusiv.

R. a) $0+1+2+3+4+5+6+7+8.9=100$.

b) $50\frac{1}{2}+49\frac{38}{76}$; c) $78\frac{3}{6}+21\frac{45}{90}$;

d) $89+6\frac{1}{2}+4\frac{35}{70}$; e) $90+8\frac{3}{6}+1\frac{27}{54}$.

9. Să se reprezinte 100 întrebuinţând: a) de 4 ori cifra 9, b) de 6 ori cifra 9, c) de 5 ori cifra 1, d) de 5 ori cifra 3, e) de 5 ori cifra 5, f) încă odată de 5 ori cifra 5.

R. a) $99\frac{9}{9}$, b) $99+\frac{99}{99}$, c) $111-11$, d) $3.33+\frac{3}{3}$,

e) $5\cdot 5\cdot 5-5.5$, f) $(5+5+5+5)\times 5$.

10. Maria are 24 de ani. Ea are de 2 ori mai mulţi ani decât avea Ana atunci, când Maria avea atâţia ani, câţi ani are Ana acuma. Câţi ani are Ana acuma? Se cere o soluţie aritmetică.

R. Ana are acuma 18 ani.

PETRE V. CAZANACLI

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, An. XXXVIII, No. 6, Februarie 1933. † *Ştefan N. Mirea*, de Ing. *C. E. Gabrielescu*. Asupra şirului lui *Fibonacci*, de *Ion B. Florescu*. Proprietăţi ale triunghiului, de *N. G. Botea*. Concursul Gazetei Matematice. Regulamentul fondului „General Şc. Panaitescu".

2. *Boletin Matematico*, Ano V, No. 10, Deciembre 1932, redactat de *Dr. Bernardo I. Baidaff*. Determinarea analitică a flexiunei totale a unei curbe regulate, de *I. Valera Gil*. Congresul international de matematici.

3. *Boletin Matematico elemental*, Ano III, No. 11, Enero 1933.

4 *Revista Matematică a elevilor craioveni*, An. I, No. 6—8. O simplă metodă pentru aflarea patratelor perfecte; de *Chiriţă Mihail*. Sinusul sumei a două arce, de *Predoescu I. M.*

5. *Petre Sergescu*. Istoria calculului numeric. (Lecţie făcută la universitatea populară „*N. Iorga*" din Vălenii-de-Munte, 16 Iulie 1932.)

6. *Petre Sergescu*. O schiţă de istorie a ştiintelor matematice. (Extras din revista „Cuget".)

7. *Petre Sergescu*. Spiritul cel nou în legea învăţământului universitar. (Cuvântare ţinută în parlament în calitate de raportar al „legei învăţământului superior".)

8. *Petre Sergescu*. Quelques propriétés des polynômes. (Lucrare prezentată la al 2-lea Congres al matematicienilor polonezi, la *Wilno*, 25 Septemvrie 1931).

9. *Petre V. Cazanacli. Evariste Galois*. (Extras din Revista Ştiinţifică „*V. Adamachi*", No. 4, 1932).

10. *N. Botea*. Sur un théorème de *M. Pompeiu*. (Extrait du Bulletin de Mathématique et de Physique pure et appliquées, de l'école Polytechnique „*Roi Carol II*" Bucarest).

11. *N. Botea*. Sur quelques équations aux dérivées partielles. (Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Academie des Sciences*, séance du 3 Janvier 1933).

PROBLEME REZOLVATE

753. — *Se dă un trapez* $ABCD$ *cu laturile paralele* $\overline{AB}$ *şi* $\overline{CD}$. *Se împart laturile neparalele în trei părţi egale:*

$$\overline{AE}=\overline{EF}=\overline{FD}=\frac{\overline{AD}}{3},\quad \overline{BH}=\overline{HI}=\overline{IC}=\frac{\overline{BC}}{3}.$$

Fie K *şi* L *punctele de întâlnire ale dreptelor* AH, DI *şi* BE, CF. *Să se arate că dreapta* KL *este paralelă cu* AB *şi să se calculeze lungimea ei.*

Să se arate încă, că mijlocul lui $\overline{KL}$ *este centrul de greutate al trapezului.*

PAUL EUGEN

Soluțiunea I-a. Să însemnăm pentru ușurință $\overline{AB} = \beta$ și $\overline{DC} = \alpha$. Ducem din B o paralelă la AD, care taie pe EH, FI și DC respectiv în punctele E', F', D'. Paralelele duse prin E și F la bazele trapezului trec respectiv prin H *și* I, deci:

$$(1)\qquad \frac{\overline{E'H}}{\overline{D'C}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{BC}} = \frac{1}{3} \quad \text{și} \quad \frac{\overline{F'I}}{\overline{D'C}} = \frac{\overline{BI}}{\overline{BC}} = \frac{2}{3},$$

sau încă:

$$(2)\qquad \overline{E'H} = \frac{1}{3}\overline{D'C}\,\frac{1}{3}(\alpha - \beta)$$

$$\overline{F'I} = \frac{2}{3}\overline{D'C} = \frac{2}{3}(\alpha - \beta).$$

De altă parte, având:

$$(3)\qquad \overline{EH} = \overline{EE'} + \overline{E'H} \quad \text{și} \quad \overline{FI} = \overline{FF'} + \overline{F'I},$$

deducem că:

$$(4)\qquad \boxed{\overline{EH} = \frac{1}{3}(2\beta + \alpha)} \quad \text{și} \quad \boxed{\overline{FI} = \frac{1}{3}(\beta + 2\alpha)}$$

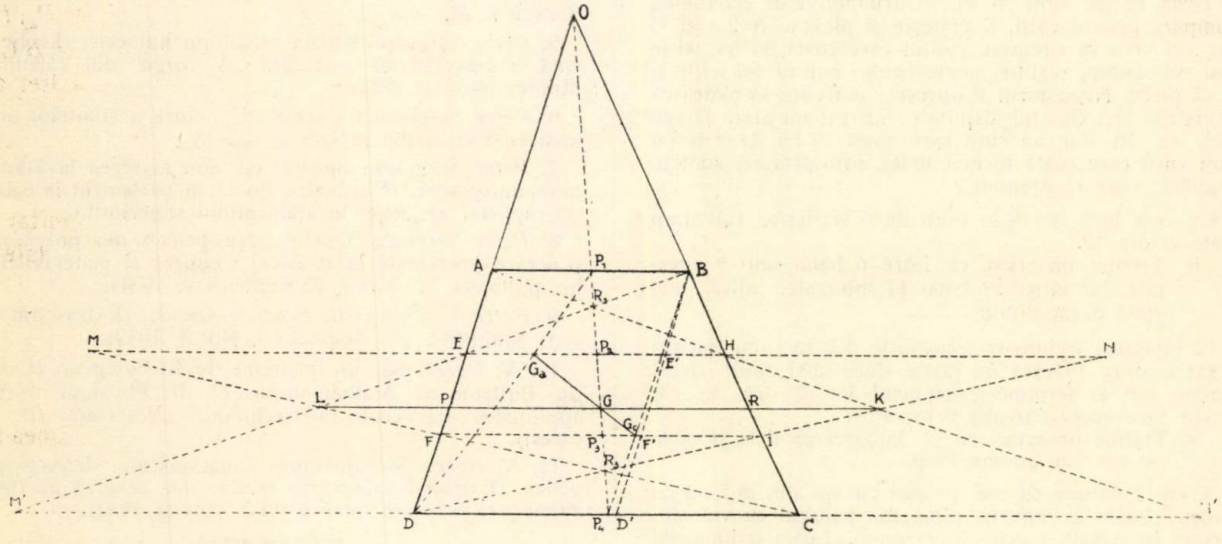
Fie acum M și N punctele unde $\overline{CF}$ și $\overline{DI}$ taie dreapta EH.

Segmentul $\overline{DN}$, trecând prin mijlocul I al segmentului $\overline{HC}$ și fiind cuprins între paralelele HN și CD, este împărțit în două părți egale de punctul I, iar patrulaterul $DCNH$ este paralelogram, adică:

$$(5)\qquad \overline{HN} = \overline{DC} = \alpha$$

Asemenea:

$$(6)\qquad \overline{ME} = \overline{DC} = \alpha,$$



deci:

$$(7)\qquad \overline{MN} = \overline{ME} + \overline{EH} + \overline{HN} = 2\alpha + \frac{1}{3}(2\beta + \alpha) = \frac{1}{3}(7\alpha + 2\beta)$$

Aceste relațiuni preliminare fiind stabilite, avem, considerând triunghiurile EDN și HCM tăiate respectiv de transversalele AHK și BEL, după teorema lui *Menelaus*, relațiunile:

$$(8)\qquad \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} \cdot \frac{\overline{HE}}{\overline{HN}} \cdot \frac{\overline{KN}}{\overline{KD}} = +1$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BH}} \cdot \frac{\overline{EH}}{\overline{EM}} \cdot \frac{\overline{LM}}{\overline{LC}} = +1,$$

din care deducem imediat în virtutea relațiunilor (4), (5), (6):

$$\left|\frac{\overline{KN}}{\overline{KD}}\right| = \left|\frac{\overline{HN}}{\overline{HE}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}}\right| = \frac{1}{3}\frac{\overline{HN}}{\overline{EH}} = \frac{\alpha}{2\beta + \alpha}$$

$$(9)\qquad \left|\frac{\overline{LM}}{\overline{LC}}\right| = \frac{1}{3}\left|\frac{\overline{EM}}{\overline{EH}}\right| = \frac{\alpha}{2\beta + \alpha},$$

sau încă:

$$(10)\qquad \left|\frac{\overline{KN}}{\overline{KD}}\right| = \left|\frac{\overline{LM}}{\overline{LC}}\right| = \frac{\alpha}{2\beta + \alpha}$$

Tot astfel, M' și N' fiind punctele unde BE și AH taie respectiv pe DC, avem considerând pe-

rechile de triunghiuri asemenea (ABH, HCN') și (ABE, EDM'), relațiunile:

$$(11)\quad \overline{CN'} = 2\,\overline{AB} = 2\beta \quad , \quad \overline{DM'} = 2\,\overline{AB} = 2\beta$$

Apoi, aplicând teorema lui *Menelaus* triunghiurilor ICD și FCD tăiate de transversalele $AHKN'$ și $BELM'$, deducem:

$$(12)\qquad \left|\frac{\overline{KI}}{\overline{KD}}\right| = \left|\frac{\overline{LF}}{\overline{LC}}\right| = \frac{\beta}{2\beta+\alpha}.$$

Impărțind relațiunile (10) la (12) respectiv, obținem:

$$(13)\qquad \left|\frac{\overline{KN}}{\overline{KI}}\right| = \left|\frac{\overline{LM}}{\overline{LF}}\right| = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Dreapta KL, împărțind laturile neparalele ale trapezului $MFIN$ în același raport, este paralelă cu bazele lui MN și FI, deci KL este paralelă cu AB și CD (paralele cu MN).

2°. Pentru calculul lungimii lui KL, este deajuns să ducem din F o paralelă cu IN (care taie pe KL în K_1 și pe MN în N_1) și să observăm că avem:

$$(14)\quad \frac{\overline{MN_1}}{\overline{LK_1}} = \frac{\overline{FM}}{\overline{FL}} = 1 + \frac{\overline{LM}}{\overline{FL}} = 1 + \frac{\alpha}{\beta},$$

deci:

$$(15)\qquad \overline{LK_1} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\overline{MN_1}$$

dar:

$$\overline{MN_1} = \overline{MN} - \overline{N_1N} = \overline{MN} - \overline{FI} =$$

$$\frac{1}{3}(7\alpha+2\beta) - \frac{1}{3}(\beta+2\alpha) = \frac{5\alpha+\beta}{3}$$

și ca urmare:

$$(16)\qquad \overline{LK_1} = \frac{\beta(5\alpha+\beta)}{3(\alpha+\beta)}$$

Observând acum că:

$$\overline{LK} = \overline{LK_1} + \overline{K_1K} = \overline{LK_1} + \overline{FI},$$

obținem:

$$(17)\qquad \boxed{\overline{LK} = \frac{2}{3}\,\frac{\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2}{\alpha+\beta}}$$

3°. *Mijlocul G al segmentului LK este centrul de greutate al trapezului $ABCD$.* Intr'adevăr, fie O punctul de întâlnire al laturilor neparalele ale trapezului P_1, P_2, P_3, P_4 mijloacele laturilor $\overline{AB}$, $\overline{EH}$, $\overline{FI}$, $\overline{DC}$; fie R_1, R_2 punctele de întâlnire ale perechilor de drepte (AH, BE) și (DI, CF). Amintind acum proprietățile: *a)* că, *mediana unui triunghiu împarte în părți egale toate segmentele paralele cu latura corespunzătoare* și *b) diagonalele oricăruia din trapezele formate de segmentele paralele și mediana considerată, sunt trei drepte concurente,* rezultă *că punctele* O, P_1, R_1, P_2, P_3, R_2, P_4 *sunt în linie dreaptă.* După aceiași proprietate aplicată triunghiului FR_2K rezultă că dreapta P_1P_4 trece prin punctul G, mijlocul lui $\overline{KL}$. Acum, dacă considerăm trapezul $ABCD$ ca format din triunghiurile BDA și BDC, și observăm că centrele de greutate G_a și G_c ale celor două triunghiuri sunt respectiv la intersecțiunile perechilor de drepte (DP_1, EH) și (BP_4, FI), deducem că centrul de greutate al trapezului $ABCD$, este un punct G' depe dreapta G_aG_c, astfel ca:

$$(18)\qquad \frac{\overline{G_aG'}}{\overline{G'G_c}} = \frac{S_c}{S_a} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Dealtă parte, segmentul G_aG_c fiind limitat la bazele trapezului $MFIN$, dreapta KL îl taie în punctul G'', astfel că:

$$(19)\qquad \frac{\overline{G_aG''}}{\overline{G''G_c}} = \frac{\overline{NK}}{\overline{KI}} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Comparând (19) cu (18), deducem relațiunea:

$$(20)\qquad \frac{\overline{G_aG''}}{\overline{G''G_c}} = \frac{\overline{G_aG'}}{\overline{G'G_c}},$$

cu alte cuvinte că G'' coincide cu G', sau încă că dreapta KL trece prin centrul de greutate al trapezului $ABCD$. Așadar, centrul de greutate al trapezului $ABCD$, fiind punctul de concurență al dreptelor G_aG_c, P_1P_4 și KL, este chiar punctul G, mijlocul lui KL.

Soluțiunea II-a. Păstrând notațiunile din soluțiunea precedentă, observăm în primul rând că EH și FI sunt paralele cu AB și CD; apoi mediana OP_1 a triunghiului AOB este mediană și în trapezele $EABH$ și $DFIC$, deci trece prin punctele R_1 și R_2 de intersecțiune a diagonalelor respective ale celor două trapeze. Observând că laturile triunghiurilor AKD și BLC, corespunzându-se

două câte două, se taie în trei puncte O, R_1 și R_2 așezate în linie dreaptă, deducem comform teoremii lui *Desargues*, că vârfurile corespunzătoare determină trei drepte concurente, adică AB, KL, CD sunt concurente în același punct și cum AB este paralelă cu CD, acest punct este la infinit pe direcția CD, adică KL *este paralelă* cu *bazele trapezului* AB și CD.

2°. Fie P și R punctele unde KL taie pe AD și BC. In triunghiul FR_2I mediana R_2P_3 taie pe KL în punctul G, mijlocul ei; dar R_2P_3 este totuna cu P_3O, deci G este deasemenea mijlocul lui PR. Rezultă în acest caz, că:

$$(21)\quad \overline{LP} = \overline{LG} - \overline{PG} = \overline{KG} - \overline{RG} = \overline{RK}$$

Considerând acum perechile de triunghiuri asemenea (ABH, HRK) și (DCI, IRK) avem relațiunile:

$$(22)\quad \frac{\overline{AB}}{\overline{RK}} = \frac{\overline{BH}}{\overline{HR}} \text{ și } \frac{\overline{RK}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{RI}}{\overline{IC}},$$

care înmulțite între ele dau relațiunea:

$$(23)\quad \frac{\overline{RI}}{\overline{HR}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DC}} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ sau } \frac{\overline{HR}}{\overline{RI}} = \frac{\alpha}{\beta},$$

Din (23) deducem ușor următoarele relațiuni noui:

$$(24)\quad \frac{\overline{HR}}{\overline{HI}} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \frac{\overline{HR}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{HR}}{\overline{HI}} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

apoi din (22) avem:

$$(25)\quad \frac{\overline{BK}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{HR}}{\overline{BH}} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \text{ sau încă: } \overline{RK} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta},$$

iar din (24) și (23) deducem:

$$(26)\quad \overline{HR} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\overline{BC}}{3}; \quad \overline{RI} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\overline{BC}}{3},$$

deci:

$$(27)\quad \overline{BR} = \overline{BH} + \overline{HR} = \frac{2\alpha+\beta}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\overline{BC}}{3}.$$

Asemenea avem:

$$(28)\quad \overline{RC} = \overline{RI} + \overline{IC} = \frac{2\beta+\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\overline{BC}}{3};$$

iar ca urmare:

$$(29)\quad \frac{\overline{BR}}{\overline{RC}} = \frac{2\alpha+\beta}{2\beta+\alpha}; \quad \frac{\overline{BR}}{\overline{BC}} = \frac{2\alpha+\beta}{3(\alpha+\beta)}.$$

PR fiind paralelă cu bazele trapezului ABCD, rezultă că:

$$\frac{\overline{PR} - \overline{AB}}{\overline{CD} - \overline{AB}} = \frac{\overline{BR}}{\overline{BC}}$$

sau

$$(30)\quad \overline{PR} = \frac{(\alpha-\beta)(2\alpha+\beta) + 3\beta(\alpha+\beta)}{3(\alpha+\beta)}$$

apoi:

$$(31)\quad \overline{LK} = 2\overline{RK} + \overline{PR} = \frac{2}{3}\,\frac{\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2}{3(\alpha+\beta)}$$

3°. Pentru a demonstra că mijlocul lui $\overline{KL}$ este centrul de greutate al trapezului ABCD, observăm în primul rând că LK taie pe $\overline{G_aG_c}$ în centrul de greutate al trapezului $ABCD$; apoi că acest centru de greutate aparține și medianei $\overline{P_1P_4}$, deci el, fiind comun celor trei drepte $\overline{G_aG_c}$, $\overline{P_1P_4}$, și $\overline{KL}$, este chiar punctul G, mijlocul lui $\overline{KL}$.

Soluțiunea III. Să presupunem că luăm ca axe de coordonate în plan baza DC (axă Ox) și latura DA (axă Oy). Să notăm cu:

$$\overline{DC} = \alpha, \ \overline{AB} = \beta, \ \overline{DA} = 3\gamma$$

și să ducem paralel cu Oy, segmentele $\overline{BB'}$, $\overline{HH'}$, $\overline{II'}$ limitate la DC. Având:

$$\frac{\overline{HH'}}{\overline{BB'}} = \frac{2}{3}, \frac{\overline{II'}}{\overline{BB'}} = \frac{1}{3},$$

deducem:

$$\overline{HH'} = 2\gamma, \quad \overline{II'} = \gamma.$$

Acestea fiind fixate, avem:

$$D(0,0); \quad C(\alpha,0); \quad A(0,3\gamma); \quad B(\beta,3\gamma);$$
$$E(0,2\gamma); \quad F(0,\gamma),$$

apoi având:

$$\frac{\overline{HB}}{\overline{HC}} = -\frac{1}{2} \text{ și } \frac{\overline{IB}}{\overline{IC}} = -2,$$

avem și:

$$H\left(\frac{2\beta+\alpha}{3}, 2\gamma\right) \text{ și } I\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}, \gamma\right).$$

Acum, punctele K și L fiind determinate de perechile de drepte (AH, DI) și (BE, CF), avem:

$$(K)\quad \begin{cases} y = \dfrac{3\gamma}{\beta+2\alpha}x \quad (DI) \\ y - 3\gamma = -\dfrac{3\gamma}{2\beta+\alpha}x \quad (AH); \end{cases}$$

$$(L)\quad \begin{cases} y-2\gamma=\dfrac{\gamma}{\beta}x & (B\,E)\\ y=-\dfrac{\gamma}{\alpha}(x-\alpha) & (C\,F)\,, \end{cases}$$

de unde:

$$(K)\quad \begin{cases} x_K=\dfrac{(\alpha+2\beta)(\beta+2\alpha)}{3(\alpha+\beta)}\\ y_K=\dfrac{\gamma(\alpha+2\beta)}{\alpha+\beta} \end{cases}$$

şi

$$(L)\quad \begin{cases} x_L=-\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\\ y_L=\dfrac{\gamma(2\beta+\alpha)}{\alpha+\beta} \end{cases}$$

Punctele K şi L, având ordonatele egale, se găsesc pe o paralelă la axa absciselor, adică *dreapta KL este paralelă cu bazele CD şi AB ale trapezului considerat.*

2°. Observăm că:

$$LK=x_K-x_L=\frac{2}{3}\,\frac{\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2}{\alpha+\beta}\,.$$

3°. Acum, amintind că centrul de greutate al trapezului $ABCD$ este intersecţia dreptelor G_aG_c şi P_1P_4 şi observând că G_a şi G_c fiind determinate de perechile de drepte $(DP_1,\ EH)$ şi $(BP_4,\ FI)$ au coordonatele $G_a\left(x=\dfrac{\beta}{3},\ y=2\gamma\right)$ şi $G_c\left(x=\dfrac{\alpha+\beta}{3},\ y=\gamma\right)$ şi asemenea: $P_1\left(\dfrac{\beta}{2},3\gamma\right)$ şi $P_4\left(\dfrac{\alpha}{2},\ 0\right)$, deducem că:

$$G\quad \begin{cases} y=2\gamma-\dfrac{\gamma}{\alpha}(3x-\beta) & (G_aG_c)\\ y\quad 3\gamma-\dfrac{3\gamma}{\alpha+\beta}(2x-\beta) & (P_1P_4) \end{cases}$$

deci:

$$G\quad \begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{3(\alpha+\beta)}\\ y_G=\dfrac{\gamma(2\beta+\alpha)}{\alpha+\beta}\,. \end{cases}$$

Observăm acum, că $y_G=y_L=y_K$, adică G aparţine dreptei LK şi mai mult încă că:

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{x_L+x_K}{2}\\ y_G=\dfrac{y_K+y_L}{2}\,, \end{cases}$$

adică G este mijlocul segmentului $\overline{LK}$.

O N T.

Au dat solutiuni geometrice bune d-nii: *Paul Eugen, Ionescu-Ţiu D. Const.* şi *Gheorghiev N.* (Bolgrad).

Au rezolvat cu ajutorul geometriei analitice Domnii: *Vâlceauu N. Justin, Dimitriu At. Ioan* şi *Hamerak Carol* (Caransebeş).

1117. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} bcx(y+z)=acy(x+z)=abz(x+y)\\ xy+yz+zx=xyx(a+b+c) \end{cases}$$

I. DUMITRIU-DADA

Impărţind prin $abc\ xyz$ primele două ecuaţii şi prin xyz ecuaţia 3-a, presupunând, $xyz\neq 0$, obţinem:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{z}+\frac{1}{y}}{a}=\dfrac{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}{b}=\dfrac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}{c}\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=a+b+c \end{cases}$$

Aplicând o proprietate cunoscută a proporţiilor, şi ţinând seamă de ecuaţia 3-a, putem scri succesiv:

$$\frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{y}}{a}=\frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}{b}=\frac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}{c}=$$

$$\frac{2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}{a+b+c}=2$$

De aci deducem sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{y}=2a\\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=2b\\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=2c \end{cases}$$

Scăzând aceste ecuaţii pe rând din ecuaţia a 3-a din (1), avem:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = b + c - a \\ \frac{1}{y} = a + c - b \\ \frac{1}{z} = a + b - c \end{cases}$$

sau:

$$(2) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{b + c - a} \\ y = \frac{1}{a + c - b} \\ z = \frac{1}{a + b - c} \end{cases}$$

Am făcut restricțiunea, $x\,y\,z \neq 0$. Dacă însă presupunem $x = 0$, rezultă din sistemul dat $y = 0$, $z = 0$.

Deci afară de sistemul de soluții (2), avem încă sistemul:

$$x = y = z = 0\,.$$

Soluții date de d-ra: *Naneș Cornelia* (Șc. Centrală, București) și de d-nii: *Arbter Emil* (lic. Beiuș), *Băleanu D. Rasvad*, *Bireh Vasile* (lic. Beiuș), *Chiriță Mihail* (lic. Milit., Craiova), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M. Marin* (lic. Milit. Craiova), *Curchi Ioan* (student, București), *Dima A. Gheorghe* (Șc. Polit, Timișoara), *Fofiu Cornel* (Șc. Polit., Timișoara), *Ghiocel V. Vasile* (lic., Giurgiu), *Godeanu Ig. Vasile* (Lic. Milit, Craiova), *Ivănescu Cezar* (bacalaureat, Bârlad), *Lățea P. C-tin* (Șc. Milit. de Artilerie), *Măscaș Petru* (lic. Beiuș), *Mecu I. Ilie* ((lic. Cantemir, București), *Milea S. È.* (Sub-Lt.), *Negrea A. Mircea* (licențiat în Matematici), *Popa Nicolae* (lic. Beiuș), *Predoescu I. Marin* (lic. Buzești, Craiova), *Săмbotin Gh.* (Sub-Lt), *Stern M. Nicolae* (lic. Beiuș) și *Vasiliu Gh. Leoben* (Inginer).

PROBLEME PROPUSE

1177. — Se cere numărul A format din factorii 2, 5, 11, știind că cel mai mare comun divizor al numerilor A și $\frac{21}{10}$ A, este 484.

EMILIAN MEREUTA

1178. — Intre două persoane s'a încheiat un împrumut de A lei. Știind că numărul B e mediu proporțional între procent și numărul zilelor pentru care s'a încheiat împrumutul, se cere dobânda acestui împrumut. Să se trateze cazul particular A = 728910, B = 20.

I. V. MATIES

1179. — Două trăsuri pleacă în același timp din localitățile A și B în sens contrar. Ele se întâlnesc după 48 minute de mers, când prima a făcut 2400 metri mai mult de cât a doua. Ce distanță este între cele două localități și ce viteză a avut fiecare trăsură, dacă trăsura din A ajunge în B cu 28 de minute mai înainte ca trăsura din B să ajungă în A.

I. DUMITRIU-DADA

1180. — Să se dovedească că polinomul:

$$x^p + x^{p-1} + \ldots + x^3 + \left[1 - \frac{p(p^2-1)}{6}\right] x^2 + \frac{(p-2)(p-1)(2p+3)}{6} x - \frac{(p-2)(p-1)p}{6},$$

se divide prin $(x-1)^3$ și să se afle câtul.

V. ALACI

1181. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2 = 49 \\ x^3 + y^3 + z^3 + x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = 84 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 98 \end{cases}$$

IOAN CURCHI

1182. — Să se construiască triunghiul A B C, cunoscând picioarele perpendicularelor din vârful A pe bisectoarele unghiurilor din B și C, precum și unghiurile ce aceste perpendiculare fac cu latura B C.

IOAN SANDULESCU

1183. — Să se afle care dintre triunghiurile înscrise în același cerc, fac minimă expresia:

$$r_a^m + r_b^m + r_c^m + h_a^n + h_b^n + h_c^n\,,$$

și să se determine această valoare minimă.

CONSTANTIN STAN

1184. — Să se stabilească identitatea;

$$\sum_{k+1}^{m} \frac{\sin(2k+1)a}{\cos^2 k\,a \cos^2(k+1)a} = \frac{\operatorname{tg}^2(m+1)a - \operatorname{tg}^2 a}{\sin a}$$

CEZAR IVANESCU

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQ E DANS SON GENRE
dens le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**

Administration :
SPINX, 75, Rue Philippe Baucq

LA REDACȚIA „REVISTEI MATEMATICE DIN TIMIȘOARA SE PRIMESC ABONAMENTE PENTRU ANUL AL V-LEA (MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)

DE BOLETIN MATEMATICO

COSTUL UNUI ABONAMENT FIIND DE 300 LEI ȘI PENTRU ANUL AL III-LEA (MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)

DE BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

COSTUL ABONAMENTULUI FIIND DE 125 LEI, PUBLICATE ÎN BUENOS AIRES; AMÂNDOUĂ 400 LEI

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Abonamentul pe anul XIII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa :

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL XIII. 15 APRILIE 1933 NO. 2.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 D. V. IONESCU: O TEOREMA DE GEOMETRIE ELEMENTARA
2. PROF. ASCANIU CRISAN: EXERCITII MATEMATICE DE ASTRONOMIE PENTRU LICEU
3. NOTE MATEMATICE: 4. 5
4. PROBLEME AMUZANTE
5. BIBLIOGRAFIE
6. PROBLEME REZOLVATE: 813 1118, 1120
7. PROBLEME PROPUSE: 1185-1192
8. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Artegrafice „Tipografia Românească"

Avem plăcerea a anunţa că începând dela 15 Martie 1933, mai face parte dintre membrii „Revistei Matematici din Timişoara“ şi *D-l Ghiţescu Spiridon*, profesor secundar, Mizil.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara“ este pentru anul XIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare

---

ANUL XIII — No. 2. TIMISOARA, 15 APRILIE 1933

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie.

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

O TEOREMĂ DE GEOMETRIE ELEMENTARĂ

de D. V. IONESCU
PROFESOR LA FACULTATEA DE ȘTIINȚE DIN CLUJ

Se ia o bandă pe hârtie cu marginele paralele cu care se face un nod, întocmai cum se face un

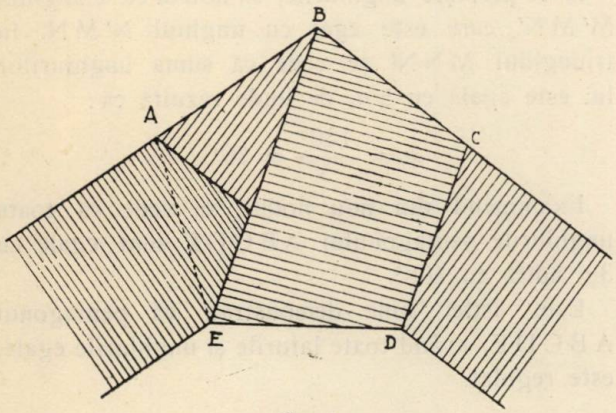


Fig. 1.

nod cu o sfoară. Se netezește bine hârtia și se obține astfel un pentagon A B C D E, așa cum arată figura No. 1. Teorema pe care vreau s'o demonstrez este următoarea:

Figura A B C D E *este un pentagon regulat.*

Iată o demonstrație simplă a acestei teoreme.

Se taie banda de hârtie dealungul lui C D și dealungul lui A E, se desface nodul, și apoi banda de hârtie, bine intinsă, este copiată pe un plan. Se obține figura No. 2.

Pe bandă se marchează aceleași litere ca în figura No. 2, se reface la loc nodul și se observă cu atenție.

Intâiu se vede că:

$$(1)\qquad MN = NP' \quad , \quad NP = RR'$$

$$(2)\qquad PQ = PN' = QR'$$

$$(3)\qquad QR = NN' \quad , \quad M'N' = QQ'$$

$$N'P' = QP' = N'M$$

$$P'Q' = MM' \quad , \quad Q'R' = Q'P.$$

Pe de altă parte se observă că:

$$(4)\quad \sphericalangle MN'N = \sphericalangle P'N'N \; ; \; \sphericalangle MNN' = \sphericalangle P'NN'$$

$$(5)\quad \sphericalangle N'PP' = \sphericalangle QPP' \; ; \; \sphericalangle N'P'P = \sphericalangle QP'P$$

$$(6)\quad \sphericalangle PQQ' = \sphericalangle R'QQ' \; ; \; \sphericalangle PQ'Q = \sphericalangle R'Q'Q$$

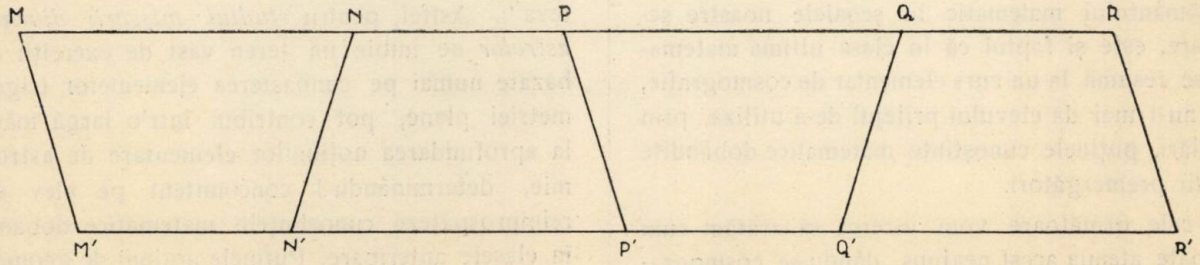


Fig. 2.

Egalitățile (1) și (4) arată că în figura 2, patrulaterul M N P' N' este romb; deasemenea egalitățile (2) și (5) arată că patrulaterul N' P Q P' este romb și în fine egalitățile (2) și (6) arată că și patrulaterul P Q R' Q' este romb.

De aci rezultă imediat că patrulaterele N' N P P', P' P Q Q' sunt trapeze isoscele.

Să mai arătăm că patrulaterul N P Q' P', este

un paralelogram. Intr'adevăr, din egalităţile de mai sus rezultă că triunghiul $P'NQ$ este isoscel. Unghiurile PNP', PQP' sunt egale, însă $PQQ'P'$ fiind un trapez isoscel, unghiurile PQP', $PQ'P'$ sunt egale şi prin urmare unghiurile PNP', $PQ'P'$ sunt egale, ceeace dovedeşte că dreptele NP', PQ' sunt paralele, adică figura $NPQ'P'$ este un paralelogram.

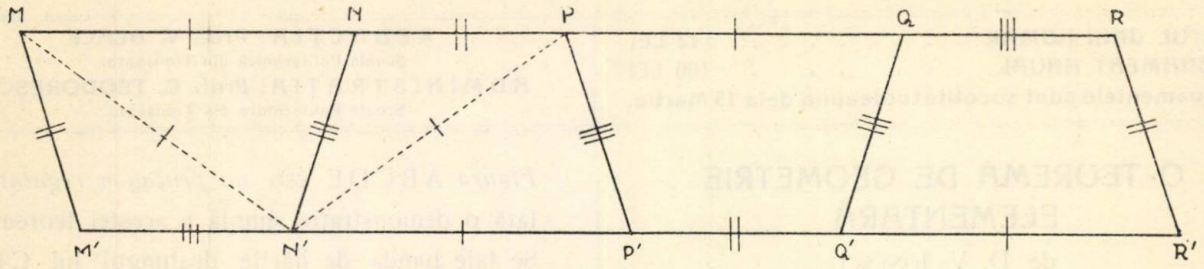


Fig. 3.

Recapitulând rezultatele de mai sus, avem figura No. 3, unde s'a tăiat cu câte o liniuţă, două sau trei segmentele care sunt respectiv egale.

Să observăm acum că triunghiul $N'MP$ este isoscel şi deci unghiul NPN' este egal cu unghiul NMN'. Pe de altă parte, triunghiurile $N'NP$, $N'M'M$ sunt egale ca având laturile respectiv egale. Unghiul NPN' mai este deci egal şi cu $M'NN'$. Dreapta MN' este astfel bisectoarea unghiului NMM' şi prin urmare triunghiul $M'MN'$ este isoscel. Deducem că toate segmentele tăiate cu două liniuţe sunt egale cu toate segmentele tăiate cu trei liniuţe.

Examinând din nou nodul, vedem că am demonstrat că toate laturile pentagonului $ABCDE$ din figura 1, sunt egale.

In ce priveşte unghiurile, să notăm cu α unghiul $M'MN'$ care este egal cu unghiul $N'MN$. In triunghiul MNN' se vede că suma unghiurilor lui este egală cu 5α, de unde rezultă că:

$$\alpha = \frac{180^0}{5} = 36^0 .$$

Examinând din nou nodul, se vede că toate unghiurile pentagonului $ABCDE$ sunt egale cu 3α adică cu 108^0.

Este astfel bine demonstrat, că pentagonul $ABCDE$, având toate laturile şi unghiurile egale, este regulat.

EXERCIŢII MATEMATICE DE ASTRONOMIE PENTRU LICEU

de PROF ASCANIU CRISAN

Unul din inconvenientele programei analitice din 1928 care a contribuit la scăderea nivelului învăţământului matematic în şcoalele noastre secundare, este şi faptul că în clasa ultimă matematica se resumă la un curs elementar de cosmografie, care nu-i mai dă elevului prilejul de-a utiliza, prin calculări, puţinele cunoştinţe matematice dobândite în anii premergători.

In cele următoare vom încerca să arătăm cum se poate atenua acest neajuns, dându-se cosmografiei în şcoalele secundare un mai pronunţat caracter matematic, prin exerciţii simple, cari fără a necesita introducerea elevului în trigonometria sferică, sunt totuşi potrivite pentruca acesta, în clasa ultimă, să nu-şi piardă continuitatea calculului matematic.

Din variatele exerciţii cari pot să însoţească lecţiile de cosmografie în liceu, alegem numai câteva [1]. Astfel, pentru *studiul mişcării diurne a astrelor* ne îmbie un teren vast de exerciţii cari, bazate numai pe cunoasterea elementelor trigonometriei plane, pot contribui într'o largă măsură la aprofundarea noţiunilor elementare de astronomie, determinându-l concomitent pe elev să-şi reimprospăteze cunostinţele matematice dobândite în clasele anterioare. Puţinele noţiuni de geometrie descriptivă cari se cer, nu prezintă obstacole serioase, în schimb, dobândirea lor în cursul acestor exer-

[1]) Vezi colecţia de exerciţii: *Dr. A. Schülke*, Aufgaben-Sammlung aus der reinen und angewandten Mathematik. Zweiter Teil. Ed. Teubner.

ciţii, va fi folositoare elevilor pentru orientarea lor în spaţiu.

1. *Ne propunem a determina durata zilei siderale, răsăritul şi apusul astrului.*

Fie (fig. 1) cercul $N Z S N_a$ meridianul locului, diametrul $N S$ meridiana, $E E_1$ intersecţia ecuatoru-

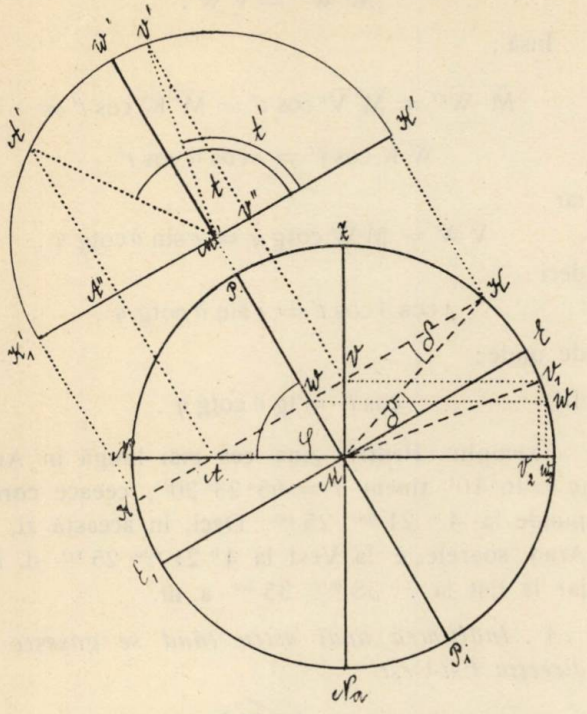


Fig. 1.

lui, iar $K K_1$ a paralelului diurn al unui astru cu planul meridian, $P P_1$ axul lumii, unghiul $\widehat{P M N} = \varphi$ latitudinea locului de observaţie, $\widehat{K M E} = \delta$ declinaţia astrului, iar r raza sferei cereşti. In această secţiune a sferei cereşti, „A" reprezintă punctul unde astrul răsare sau apune.

Rabatem planul paralelului diurn pe planul meridian, iar, pentru a nu complica desenul, ne mărginim numai la semiparalelul diurn, deplasându-l în direcţia axei lumii. Arcul $\widehat{A K}$ reprezintă semiarcul diurn (t) sau unghiul orar, în momentul răsăritului. După indicaţiile figurei:

$$\overline{A W} = \overline{A'' M'} = \overline{M' A'} \cos (180 - t)$$

însă:

$$\overline{M' A'} = \overline{M' K'} = \overline{W K} = r \cos \delta ,$$

deci:

$$(1) \qquad \overline{A W} = - r \cos \delta \cos t .$$

Pe de altă parte:

$$\overline{A W} = \overline{M W} \operatorname{tg} \varphi$$

sau, fiind:

$$\overline{M W} = r \sin \delta$$

$$(2) \qquad \overline{A W} = r \sin \delta \operatorname{tg} \varphi$$

Din (1) şi (2) urmează că:

$$(I) \qquad \cos t = - \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi$$

[Pentru o localitate din emisferul austral φ fiind negativ, formula va deveni:

$$\cos t = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi .]$$

Această formulă, pe lângă faptul că ne dă posibilitatea a discuta lungimea zilelor la diferite latitudini şi în diferitele epoci ale anului, serveşte şi la rezolvirea următoarelor probleme:

Să se calculeze: a) unghiul orar al unui astru cu declinaţia dată, în momentul când răsare sau apune (ora răsăritului şi a apusului);

b) semiparalelul diurn al unui astru;

c) durata celei mai lungi zile la o anumită latitudine;

d) la ce latitudine durează ziua cea mai lungă un număr dat de ore;

e) zilele în care, la o latitudine dată, soarele apune la un moment dat.

Exemplu: La câte ore răsare soarele în Arad ($\varphi = 46^0\,10'$) în cea mai lungă zi? ($\delta = 23^0\,27'$).

Din formula (I) obţinem unghiul orar $t = 116^0\,51'\,33''$ sau $t = 7^h, 47^{min.}\,26^{sec.}$ Deci în Arad, în cea mai lungă zi, soarele răsare la 4^h, $12^{min.}\,26^{sec.}$ şi apune la $19^h\,47^{min.}\,26^{sec.}$. Ziua durează 15^h, $34^{min.}\,52^{sec.}$.

2^0. *La ce distanţă de punctul cardinal Est (Vest), răsare (apune) soarele?*

Rabatând planul orizontului pe al meridianului, (fig. 2), arcul $\widehat{A'' \text{Est}} = \widehat{A''' \text{Vest}} = m$ este distanţa unghiulară cerută. Or, din figură rezultă că:

$$(1) \qquad \overline{A M} = \overline{A' M'} = r \sin m$$

şi

$$(2) \qquad A M = \frac{M W}{\cos \varphi} = \frac{r \sin \delta}{\cos \varphi}$$

Din (1) şi (2) urmează că:

(II) $$\sin m = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}$$

Exemplu: *a*) La ce latitudine apune soarele, în cea mai lungă zi, în punctul Nord-Vest?

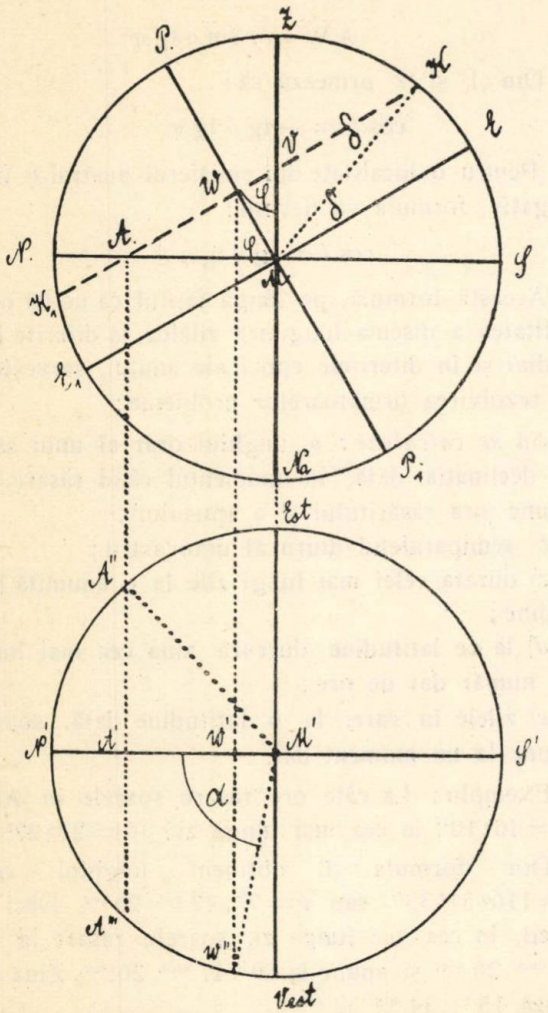


Fig. 2.

Din (II) obţinem:

$$\cos \varphi = \frac{\sin \delta}{\sin m} \qquad \text{unde} \begin{cases} \delta = 23^0\,27' \\ m = 45^0 \end{cases}$$

b) In ziua de 12 Septemvrie ($\delta = 4^0\,24'$) s'a observat răsăritul soarelui la $6^h\ 30^{min.}$

La ce latitudine a avut loc observaţia şi cum determinăm de aci punctul Nord?

Din formula (I) aflăm $\varphi = 59^0\,28'\,52''$, iar apoi din (II) $m = 5^0\,6'\,30''$. Deci punctul Nord se află dela soare spre stânga cu $84^0\,53'\,30''$.

3°. *Să se determine ora când un astru se găseşte în primul vertical, adică în direcţia Est-Vest (în punctul V_1 fig. 1).*

Proiecţia lui V fiind V' (fig. 1) problema se reduce la aflarea arcului $\overline{V'K'} = t'$

$$\overline{M'W''} = \overline{VW}.$$

Insă:

$$\overline{M'W''} = \overline{M'V'} \cos t' = \overline{M'K'} \cos t' = \overline{WK} \cos t' = r \cos \delta \cos t',$$

iar:

$$\overline{VW} = \overline{MW} \operatorname{cotg} \varphi = r \sin \delta \operatorname{cotg} \varphi,$$

deci:

$$r \cos \delta \cos t' = r \sin \delta \operatorname{cotg} \varphi,$$

de unde:

(III) $$\cos t' = \operatorname{tg} \delta \operatorname{cotg} \varphi.$$

Exemplu: Pentru ziua cea mai lungă în Arad ($\varphi = 46^0\,10'$) ţinem $t' = 65^0\,23'\,20''$, ceeace corespunde la $4^h\ 21^{min.}\ 25^{sec.}$. Deci, în această zi, în Arad soarele e la Vest la $4^h\ 21^{min.}\ 25^{sec.}$ d. m., iar la Est la $7^h\ 38^{min.}\ 35^{sec.}$ a. m.

4°. *Înălţimea unui astru când se găseşte în direcţia Est-Vest.*

Înălţimea cerută $h' = \widehat{V_1 M V_2}$ (fig. 1).

In triunghiul $V_1 M V_2$

$$\overline{V_1 V_2} = MV = r \sin h' = \frac{MW}{\sin \varphi} = \frac{r \sin \delta}{\sin \varphi},$$

astfel:

(IV) $$\sin h' = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}$$

Exemplu: In cea mai lungă zi, în Arad, înălţimea soarelui în direcţia Est-Vest e de $33^0\,29'$.

5°. *Coordonatele orizontale ale unui astru la ora 6.*

a) *Înălţimea unui astru la 6 ore,* adică în momentul când se găseşte în punctul W (fig. 1).

Unghiul căutat e, $h'' = \widehat{W_1 M W_2}$

$$\overline{WB} = \overline{CD} = r \sin h''$$

$$\overline{WB} = \overline{WM} \sin \varphi = r \sin \delta \sin \varphi,$$

deci:

(V) $$\sin h'' = \sin \delta \sin \varphi .$$

b) Azimutul unui astru la 6 ore.

Rabatând paralelul diurn pe planul orizontului (fig. 2) punctul W se proiectează în W'' ($\overline{W'W''}$ fiind egal cu $\overline{WK}$, iar azimutul căutat va fi unghiul $\widehat{W''M'N'} = \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{W'W''}}{\overline{M'W'}},$$

insă:

$$\overline{W'W''} = \overline{KW} = r \cos \delta$$

$$\overline{M'W'} = \overline{MB} = \overline{MW} \cos \varphi = r \sin \delta \cos \varphi$$

deci:

(VI) $$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r \cos \delta}{r \sin \delta \cos \varphi} = \frac{\operatorname{cotg} \delta}{\cos \varphi}$$

Exemplu: In 3 August declinaţia soarelui fiind $\delta = 17^{0}\,36'$, să se afle coordonatele lui orizontale, la 6 ore, în Arad. Folosind formulele (V) şi (VI), aflăm inălţimea $h = 12^{0}\,36'\,54''$ şi azimutul $\alpha = 77^{0}\,36'\,33''$. Soarele, dimineaţa ora 6, se găseşte dela Nord spre Est cu $77^{0}\,36'\,33''$, iar la 6 ore seara cu acelaş unghiu dela Nord spre Vest.

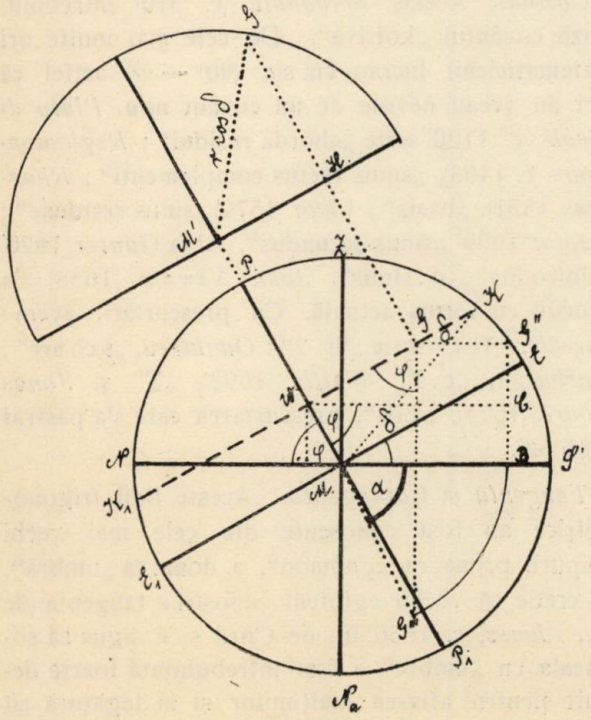


Fig. 3.

6°. *Coordonatele orizontale ale astrului la ora t. (fig. 3.)*

a) Inălţimea astrului deasupra orizontului.

Rabatem planul paralelului diurn pe planul meridianului (fig. 3). Astrul aflându-se la ora t în G. înălţimea lui deasupra orizontului va fi $\overline{G''S} = h$.

(1) $$\overline{G''B} = \overline{G''C} + \overline{CB} = r \sin h .$$

Insă:

$$\overline{G''C} = \overline{GW} \cos \varphi ,$$

unde:

$$\overline{GW} = \overline{M'H} = \overline{M'G'} \cos t = r \cos \delta \cos t$$

deci:

(2) $$\overline{G''C} = r \cos \delta \cos \varphi \cos t$$

şi

(3) $$\overline{BC} = \overline{MW} \sin \varphi = r \sin \delta \sin \varphi .$$

Inlocuind (2) şi (3) în (1) obţinem:

(VII) $$\sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t .$$

Din această formulă putem afla timpul local t, din care scâzând timpul local al primului meridian şi imulţind diferenţa cu 15, obţinem longitudinea locului de observaţie.

b) Azimutul astrului la ora t.

Toate punctele de aceiaşi înălţime se găsesc pe un cerc, paralel cu orizontul, având raza $\overline{MB} = \overline{MG'''}$ (fig. 3). Azimutul lor e, $\alpha = \widehat{BMG'''}$.

$$\overline{KG'''} = \overline{G'H} = r \cos \delta \sin t$$

$$\overline{KG'''} = \overline{MG'''} \sin \alpha = \overline{MB} \sin \alpha = r \cos h \sin \alpha ,$$

deci:

$$r \cos h \sin \alpha = r \cos \delta \sin t$$

şi

(VIII) $$\sin \alpha = \frac{\cos \delta \sin t}{\cos h}$$

Exemplu: In ziua de 20 Maiu 1932, declinaţia soarelui fiind $\delta = 19^{0}\,54'$, soarele stătea în Arad ($\varphi = 46^{0}\,10'$) deasupra orizontului la $35^{0}\,48'$ înălţime. Să se afle timpul observaţiei şi azimultul soarelui în acel moment.

Din formula (VII) obţinem:

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$$

$$\cos t = \frac{\sin h}{\cos \varphi \cos \delta}\left(1 - \frac{\sin \varphi \sin \delta}{\sin h}\right)$$

Făcând substituţia:

$$\operatorname{tg}^2 \psi = \frac{\sin \varphi \sin \delta}{\sin h},$$

obţinem:

$$\cos t = \frac{\sin h \cos 2\psi}{\cos \varphi \cos \delta \cos^2 \psi},$$

unde:

$$\operatorname{tg} \psi = \sqrt{\frac{\sin \varphi \sin \delta}{\sin h}}.$$

Făcând calculele, obţinem pentru t:

$$t = 58^0\ 36'\ 50''.$$

Deci observaţia a avut loc la $8^h\ 25^{min.}\ 33^{sec.}$ dimineaţa, sau $3^h\ 34^{min.}\ 27^{sec.}$ după masă.

Azimutul se obţine din formula (VIII), care ne dă valoarea $\alpha = 81^0\,46'$. In momentul observaţiei soarele se găsea dimineaţa dela Nord spre Est cu $81^0\,46'$, iar după masă, în direcţia N $81^0\,46'$ V.

NOTE MATEMATICE

3. — *Semnele întrebuinţate în Trigonometrie.* Semnele algebrice sunt nişte simboluri: + sau — nu sugerează, prin forma lor, cuvintele „plus“ sau „minus“. Din contra, semnele trigonometrice sunt nişte prescurtări de cuvinte: „sin“ pentru „sinus“, „cos“ pentru „cosinus“ etc. Se cuvine, deci, sa tratăm chestiunea din acest dublu punct de vedere: 1) istoricul cuvintelor „sinus“, „cosinus“ etc., şi 2) istoricul prescurtărilor care au fost întrebuinţate pe vremuri şi al celor de azi. Luăm, pe rând, toate liniile trigonometrice.

Sinus. Matematicianul indian *Aryabhata* (c. 510) întrebuinţează cuvântul „jya“ sau „jiva“ (= coardă). El şi, mai ales, compatriotul său *Bhaskara* (c. 1150) au întocmit nişte table a sinusurilor, din 1^0 în 1^0, destul de bine calculate. Arabii au modificat cuvântul „jya“ în „jiba“, ceeace nu înseamnă nimic, şi, mai târziu, l'au înlocuit cu cuvântul „jaib“ (= golf, sân, cută). E explicabil, deci, că unul dintre primii traducători ai operelor matematice arabe, *Gherardo di Cremona* (c. 1150) a tradus cuvântul „jaib“ cu „sinus“, ceeace înseamnă exact acelaş lucru. Cuvântul nou a fost adoptat de mai toţi autorii medievali, cu unele excepţii, cum a fost, de ex. „chorda“ sau „perpendiculum“. *Fibonacci* (1220) defineşte „sinus rectus“ şi „sinus versus“ (avem, precum se ştie, sin vers $\alpha = 1 - \cos \alpha$). Prescurtările cuvântului „sinus“ apar abia în secolul al 17-lea. Astfel, *Girard* (1626) înseamnă sinusul unghiului A cu „A“, iar cosinusul cu „a“. *Richard Norwood* (1631) întrebuinţează prescurtările „s“, „t“, „sc“, „tc“ şi „sec“ pentru „sinus“, „tangentă“, „sinusul complimentului (cosinus)“, „tangenta complimentului (cotangentă)“ şi „secantă“ respectiv. *Hérigone* (1634) scrie „sin“; *Cavalieri* 1643), „Si“; *Oughtred*, (1647) „S“. Vedem că notaţia de azi are aproape exact 300 de ani de existenţă. Pentru a termina cu sinus, trebue subliniat că o teorie veche după care „sinus“ = „s. ins.“ = „semi-inscripta (chorda)“ este lipsită de orice temei şi socotită chiar absurdă. (Vezi cartea lui *D. E. Smith*, „History of Mathematics“, vol. II, pag. 616, utilizată pentru această notă).

Cosinus. Acelaş *Aryabhata* (c. 510) întrebuinţează cuvântul „kotijya“. De cele mai multe ori matematicienii lucrau cu sin $(90^0 - \alpha)$, astfel că nici nu aveau nevoie de un cuvânt nou. *Plato di Tivoli* (c. 1120) scrie „chorda residui“; *Regiomontanus* (c. 1463), „sinus rectus complementi“; *Rhaeticus* (1551), „basis“; *Vieta* (1579) „sinus residuae“; *Magini* (1609) „sinus secundus“. Abia *Gunter* (1620) a introdus „co.sinus“, *John Newton* (1658) l'a înlocuit cu forma actuală. Ca prescurtări, avem: *Cavalieri* (1643) scrie „Si. 2“; *Oughtred*, „s co arc“; *Scarburgh*, „c.s“, *Wallis* (1693), „Σ“ şi *Jonas Moore* (1674), „Cos“, prescurtarea care s'a păstrat până azi.

Tangentă şi Cotangentă. Aceste linii trigonometrice au fost cunoscute din cele mai vechi timpuri, prima ca „gnomon“, a doua ca „umbră“. Se crede că vechii egipteni cunoşteau tangenta (de ex., *Ahmes*, c. 1550 în. de Chr.) şi e sigur că socoteala cu „umbre“ a fost întrebuinţată foarte demult pentru aflarea înălţimilor şi în legătură cu cadranul solar (*Anaximandru*, c. 575 în. de Chr.) Se zice că *Thales* a măsurat înălţimea piramidelor cu ajutorul umbrei lor şi a triunghiurilor aseme-

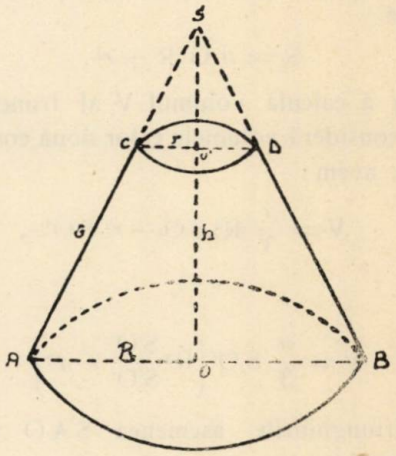
nea. Scriitorii arabi făceau deosebirea între *umbra dreaptă*, — „umbra", „umbra recta", sau „umbra extensa" în traducerea latină, — şi *umbra întoarsă*, — „umbra versa" sau „umbra stans", — după cum gnomonul a fost aşezat perpendicular pe un plan orizontal (cadranul solar obişnuit), sau perpendicular pe un zid vertical (cadranul solar aşezat pe un perete). Este interesant de ştiut că aceste „umbre" s'au păstrat foarte mult timp, chiar până în secolul al 18-lea inclusiv. Cu timpul apar şi alte denumiri. Astfel, *Vieta* (c. 1593) scrie, în loc de „tangentă", „sinus foecundarum", sau „foecundus", „amsinus" şi „prosinus". *Thomas Fincke* (1583) introduce cuvântul „tangens" (= tangentă), în locul vechiului nume „umbra versa". *Magini* (1609) scrie „tangens secunda", în loc de „cotangentă". *Gunter* (1620) introduce cuvântul „cotangens" (= cotangentă). Ca prescurtări, avem: *Cavalieri* (1643) scrie „Ta" şi „Ta . 2"; *Oughtred* (1657), „t arc" şi „t co arc"; *Scarburgh*, „t" şi „c t"; iar *Wallis* (1693), „T" şi „t". *Girard* (1626) scrie „tan" şi *Jonas Moore* (1674) „Cot". Aceste notaţii s'ar putea zice că sunt cele de azi, dar observăm, cu o oarecare mirare, că n'avem aceleaşi notaţii; într'adevăr, întâlnim, în diferite cărţi, „tg", „tan", „tang", „ctg", „cot", „cotg".

Secantă şi Cosecantă. Aceste linii trigonometrice au apărut foarte târziu, deoarece nu erau de niciun folos pentru Astronomie sau Agrimensură. Ele apar abia în lucrările scriitorului arab *Abu'l Wefa* (c. 980) dar fără nume. *Copernicus* (1542) scrie „hypotenusa", în loc de „secantă"; la fel face şi *Rhaeticus* care, pentru întâia oară, introduce valorile secantei şi ale cosecantei în tablele liniilor trigonometrice („Canon doctrinae triangulorum", (1551). *Fincke* (1583) introduce cuvântul „secans" (= secantă). *Vieta* numia această linie „transsinuosa". Numele „cosecans" apare întâia oară într'o carte a lui *Rhaeticus*, apărută după moartea lui („Opus Palatinum", 1596). *Magini* (1592) şi *Cavalieri* (1643) scriau „secans secunda". Ca prescurtări, avem: *Cavalieri* scrie „Se" şi „Se . 2"; *Oughtred* (1657), „se arc" şi „sec co arc"; *Wallis* (1693), „s" şi „σ". *Girard* (1626) scrie „sec", adică, prescurtează ca şi noi astăzi. Trebue observat, totuşi, că n'avem aceleaşi notaţii pentru „secantă" şi „cosecantă"; întâlnim, în diferite cărţi, „sec", „sc", „cosec", „csc".

PETRE V. CAZANACLI

4. — *Suprafaţa laterală şi volumul trunchiului de con circular drept.*

Suprafaţa laterală şi volumul trunchiului de con se găsesc ca limita unui trunchiu de piramidă regulată înscrisă sau circumscrisă, în care numărul laturilor poligonului de bază tinde către înfinit. Formulele care dau suprafaţa laterală şi volumul se pot deduce din formulele stabilite la conul circular drept.



Fie trunchiul de con A B D C, prelungim generatoarele care se'ntâlnesc în punctul S. Suprafaţa laterală S_l a trunchiului de con va fi dată de diferenţa suprafeţelor laterale ale conurilor S A B şi S C D, scriind aceasta avem:

$$S_l = \pi (R \cdot SA - r \cdot SC), \tag{1}$$

sau:

$$S_l = \pi \cdot SC \left(R \frac{SA}{SC} - r \right) \tag{1'}$$

Din triunghiurile S A O şi S C O' care sunt asemenea, deducem:

$$\frac{SA}{SC} = \frac{R}{r} \tag{2}$$

Această proporţie se mai poate scri:

$$\frac{SA - SC}{SC} = \frac{R - r}{r} \tag{2'}$$

de unde:

$$SC = \frac{r}{R-r}(SA - SC)$$

dar:

$$SA - SC = AC = G$$

generatoarea trunchiului de con, deci:

(3) $$SC = \frac{rG}{R-r}$$

înlocuind (2) şi (3) în (1′) s'obţine:

$$S_l = \pi \frac{rG}{R-r} \times \frac{R^2 - r^2}{r}$$

în care făcând simplificările se găseşte formula cunoscută:

(4) $$S_l = \pi G (R + r).$$

Pentru a calcula volumul V al trunchiului de con, se consideră volumele celor două conuri S A B şi S C D, avem:

(5) $$V = \frac{\pi}{3}(R^2 SO - r^2 SO'),$$

sau:

(5′) $$V = \frac{\pi}{3} SO' \left(R^2 \frac{SO}{SO'} - r^2 \right)$$

Din triunghiurile asemenea S A O şi S C O′ avem proporţia:

(6) $$\frac{SO}{RO'} = \frac{R}{r}$$

Ceeace se mai scrie:

$$\frac{SO - SO'}{SO'} = \frac{R-r}{r}$$

de aci:

$$SO' = \frac{r}{R-r}(SO - SO')$$

ţinând seama de notaţiile de pe figură:

$$SO - SO' = OO' = h,$$

înălţimea trunchiului de con, deci:

(7) $$SO' = \frac{rh}{R-r}$$

înlocuind (6) şi (7) în (5′) se obţine:

$$V = \frac{\pi}{3} \frac{rh}{R-r} \times \frac{R^3 - r^2}{r}$$

făcând simplificările găsim formula cunoscută:

(8) $$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

V. MIOC

PROBLEME AMUZANTE [1])

1. O ţărancă vinde nişte mere. Sunt două feluri, câte 60 de mere de fiecare fel. Ea dă 2 mere de felul întâi cu 50 bani, sau 3 mere de felul al 2-lea cu acelaş preţ. La întoarcere, ea spune stăpânului său: „Am avut un acelaş număr de mere, de felul 1-âi şi al 2-lea. Cum dădeam cu 50 de bani sau 2 mere mai bune sau 3 mere mai proaste, înseamnă că dădeam cu 1 leu 5 bucăţi. Am avut 120 mere; am primit câte un leu pentru 5 bucăţi, am câştigat, deci, 24 lei". — Ea îl păcăleşte, astfel, pe stăpân. Unde este greşala?

R. Pentru felul 1-âi ea are: 50 bani $\times$ 30 = 15 lei, pentru felul al 2-lea: 50 bani $\times$ 20 = 10 lei. In total: 25 lei. Socoteala ţărăncii e falsă, fiindcă ea nu poate să vândă de un acelaş număr de ori câte 2 mere bune şi câte 3 mere proaste.

2. Un elev face o împărţire şi obţine câtul 57 şi restul 52 El face proba, înmulţeşte, deci, câtul cu împărţitorul şi adaogă restul; astfel, el capătă 17380, ceeace nu se potriveşte cu deîmpărţitul propus. Elevul a greşit, luând, în timpul înmulţirii, a 2-a cifră a împărţitorului (socotită dela dreaptă), drept 0, în loc de 6. Care sunt numerele date?

R. 20800 : 364.

3. 2 elevi înmulţesc două aceleaşi numere. Ca probă, fiecare împarte produsul prin factorul cel mai mic. Rezultatele sunt amândouă greşite. Primul obţine câtul 575 şi restul 227; al 2-lea câtul 572 şi restul 308. Intr'adevăr, fiecare, făcând înmulţirea, a uitat să adaoge câte un 1, dar fiecare într'un alt loc. Primul a obţinut, astfel, cu 100 prea puţin, al 2-lea cu 1000 prea puţin. Ce numere au fost înmulţite?

R. 576 $\times$ 327.

4. Un melc suie un zid. El se urcă 7 metri în fiecare zi şi se lasă jos cu 4 metri în fiecare noapte Când ajunge melcul în vârful zidului, dacă acesta are 19 metri? Răspunsul e, de obicei, următorul: După o zi şi o noapte melcul se urcă cu 3 metri; deci, el îşi ajunge ţinta în în ziua a 7-a. Dar e uşor de văzut că această socoteală e greşită: melcul se suie pe zid la sfârşitul zilei a 5-a, căci, după primele 4 zile şi 4 nopţi, el atinge tocmai înălţimea de 12 metri.

5. Intr'un dulap cu cărţi este un vierme care mănâncă hârtie. Ii trebue o zi ca să străbată o foie de 1 mm. Două volume ale unei aceleiaşi opere stau alături, fiecare volum are câte 4 cm, grosime mai sunt şi învelişurile, fiecare câte 2 mm. grosime. In cât timp viermele va străbate tot drumul dela prima pagină a volumului 1-âi la ultima pagină a volumului al 2-lea?

R. In 4 zile numai: trebue să observăm cum stau volumele în raft.

6. Matematicianul american *Augustus de Morgan* zicea,

[1]) Aceste probleme şi cele din numărul trecut sunt culeze din volumul: *Dr. Walter Lietzmann:* „Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen". (Editura *Ferdinand Hirt*, Breslau 1928).

când cineva îl întreba câți ani are: „Am avut x ani în anul x^2". E suficient oare să știm că *de Morgan* trăia în secolul al 19-lea? Nu, căci se zice despre un principe german din secolul al 18-lea, că el avea x ani în anul x^2. Se cere anul nașterii lui *A. de Morgan* și a principelui german.

R. Anul nașterii lui *A. de Morgan*: 1806. Într'adevăr: $1806 + 43 = 43^2$. Anul nașterii principelui german: 1722. Fiindcă, $1722 + 42 = 42^2$.

Problema se poate generaliza, astfel: începând cu ce secol nu vom mai avea nici-o soluție pentru un anume secol?

PETRE V. CAZANACLI

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXVIII, No. 7, Martie 1933. Proprietăți ale triunghiului (urmare), de *N. G. Botea*. Regulamentul fondului *„Vasile Conta"*.

2. *Bulletin Scientifique de l'école Polytechnique de Timișoara*. Tome 4, fasc. 3—4. Les expressions du reste et du quotien de la division de deux polynômes, par *V. Alaci*. Sur l'équation de *Bessel*, par *M. Ghermanesco*. Sur l'intégrale de *Poisson*, par *M. Ghermanescu*. Un problème de géomètrie différentielle, par *D. V. Jonesco*. Sur la parabole de sûreté, par *D. V. Jonesco*. La vitesse du projectile sur trajectoire, par Lieutenant *Mihail I. Focșeneanu*. La corrélation statistique, par *C. C. Teodoresco*. Quelques propriétés caracteristiques des transports feroviares en comparaison avec les transports automobiles, par Colonel *Gh. Coatu*. La hauteur optima des barres dans les rainures des machines à courant alternatif, par *Remus Basiliu Rădulet*. Observations critiques de l'article: Sur une famille spéciale de tolérances appliquées aux moteur d'aviation, par Ing. *L. Stoicescu*. Über die Regulierung der Kaplan Turbinen, von Dipl. Ing. *Aurel Barglazan*. Über einige Ermüdungs- oder Dauerbrüche, von Assistent Ing. *Stefan Nadașan*. La Métadyne et son application en traction éléctrique, par Prof. *C. Stancescu*. Sur la constitution de la bis-diéthyl-anilinisatine et du colorant vert obtenu par oxydation, par Dr. Ing. *C. Cândea*. Les caracteristiques physiques et chimiques des antracites et des houilles de Roumanie, par *I. Cristesco* et *G. Stavrat*. *Nicolas Kopernic* et la Bohême, par Dr. *Q. Vetter*. *Iohann Bolyai*, vorgeher der nichteuklidischen Geometrie, von: Dipl. Ing. *Eduard Kreiling*. Organizarea rațională a producției industriale, de Inginer *Al. T. Ghenea*. Note. Comptes-rendus des séances de la Société Scientifique de l'école Polytechnique de Timișoara.

3. *Boletin Matematico*, Ano V, Enero 1933, publicată de *Dr. Bernardo I. Baidaff*. Asupra sistemelor de inecuațiuni liniare, de *F. La Menza*. Determinarea conicelor prin mijlocirea elementelor proprii, de *T. C. Abruti*.

4. *Boletin Matematico Elemental*, Ano III, No. 12' Febrero de 1933, Buenos Aires. Cel de al 3-lea an. Rezultatul celui de al 3-lea concurs la Boletin Matematico Elemental.

5. *Revista Matematică a elevilor Craioveni*, anul II, No. 1, Martie 1933. Generalizarea câtorva formule trigonometrice, de *Predoescu I. M.*

6. *Licurici*, revista Societății culturale „B. P. Hasdeu" de pe lângă liceul de băeți No. 1, din Chișinău.

7. *P. Sergesco*. Quelques points de la théorie des équations algébriques. (Internationaler Mathematiker Kongress Zürich 1932.)

PROBLEME REZOLVATE

813. — *Fie ABC un triunghiu oarecare. Perpendicularele ridicate în A și B respectiv pe AC și BC se taie în C'. La fel obținem punctele B' și A'. Dreapta $B'C'$ taie laturile AC și AB în B_a și C_a. Analog avem punctele B_c, A_c și A_b, C_b.*

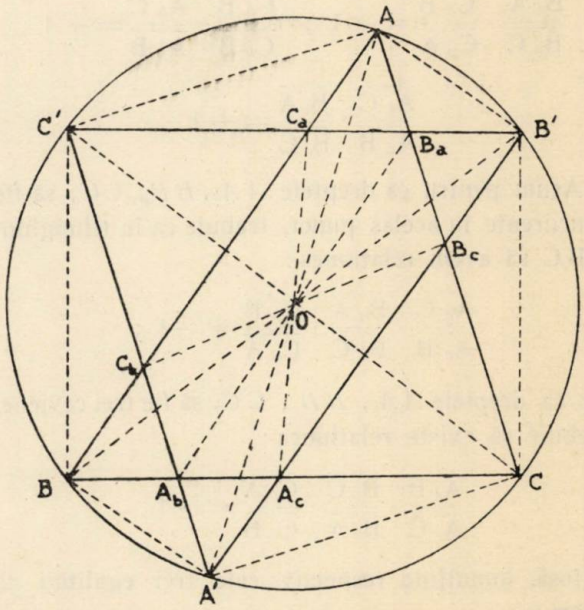
1°. *Să se arate că triunghiurile ABC și $A'B'C'$ sunt egale.*

2°. *Patrulaterele $B_aC_bA_bB_c$, $C_bA_cB_cC_a$, $A_cB_aC_aA_b$ sunt niște paralelograme.*

3°. *În ce caz grupurile de drepte (AA_b, BB_a, CC_a) și (AA_c, BB_c, CC_b) sunt concurente?*

IUSTIN N. VALCEANU

1°. Fie O centrul cercului ABC. Observăm că putem ușor construi perpendicularele în A și B, respectiv pe AC și BC, luând punctul C', diametral opus lui C în cercul O, și unindu-l cu A



și B. In acelaș fel observăm că punctele B' și A' sunt diametral opuse respectiv punctelor B și A în același cerc O. *Triunghiurile $A'B'C'$ și ABC fiind simetrice în raport cu punctul O, sunt superpozabile*, unul altuia, printr'o rotație de 180° în jurul centrului O, *deci egale*. Observăm în plus că paralelogramele $ABA'B'$, $ACA'C'$, $BCB'C'$ sunt dreptunghiuri, având unghiurile drepte.

2°. Patrulaterul $CB_aC'A_b$, având laturile

$C B_a$, $C' A_b$ [care sunt $C A$ și $C' A'$] paralele și laturile $B_a C'$, $A_b C$ [care sunt $B' C'$, $B C$] asemenea paralele, *este un paralelogram;* deci diagonalele sale împărțindu-se reciproc în părți egale, punctele B_a, A_b *sunt simetrice în raport cu punctul O.* In același fel se demonstrează că perechiile de puncte (C_a, A_c); (B_c, C_b) *sunt respectiv simetrice în raport cu punctul O.*

Rezultă imediat că *patrulaterele* $B_a C_a A_b A_c$, $C_b A_b B_c B_a$, $A_c B_c C_a C_b$ *sunt paralelograme,* diagonalele lor împărțindu-se reciproc în părți egale.

3°. Observând ca $B_a C_a \| B C$; $C_b A_b \| C A$; $A_c B_c \| A B$ rezultă, aplicând triunghiului $A B C$ proprietatea dreptei paralele cu o latură a triunghiului, următoarele relațiuni:

$$(1)\qquad \frac{\overline{B_a A}}{\overline{B_a C}} = \frac{\overline{C_a A}}{\overline{C_a B}}\ ;\ \frac{\overline{C_b B}}{\overline{C_b A}} = \frac{\overline{A_b B}}{\overline{A_b C}}\ ;\ \frac{\overline{A_c C}}{\overline{A_c B}} = \frac{\overline{B_c C}}{\overline{B_c A}}$$

sau încă sub forma:

$$(2)\qquad \frac{\overline{B_a A}}{\overline{B_a C}} \cdot \frac{\overline{C_a B}}{\overline{C_a A}} = +1\ ;\ \frac{\overline{C_b B}}{\overline{C_b B}} \cdot \frac{\overline{A_b C}}{\overline{A_b B}} = +1\ ;\ \frac{\overline{A_c C}}{\overline{A_c B}} \cdot \frac{\overline{B_c A}}{\overline{B_c C}} = +1$$

Acum pentru ca dreptele $A A_b$, $B B_a$, $C C_a$ să fie concurente în același punct, trebuie ca în triunghiul $A B C$ să avem relațiunea:

$$(3)\qquad \frac{\overline{A_b C}}{\overline{A_b B}} \cdot \frac{\overline{B_a A}}{\overline{B_a C}} \cdot \frac{\overline{C_a B}}{\overline{C_a A}} = -1\ ;$$

iar ca dreptele $A A_c$, $B B_c$, $C C_b$ să fie trei ceviene, trebuie să existe relațiunea:

$$(4)\qquad \frac{\overline{A_c B}}{\overline{A_c C}} \cdot \frac{\overline{B_c C}}{\overline{B_c A}} \cdot \frac{\overline{C_b A}}{\overline{C_b B}} = -1\ .$$

Insă, înmulțind respectiv cele trei egalități (2) avem:

$$\frac{\overline{B_a A}}{\overline{B_a C}} \cdot \frac{\overline{C_a B}}{\overline{C_a A}} \cdot \frac{\overline{C_b B}}{\overline{C_b A}} \cdot \frac{\overline{A_b C}}{\overline{A_b B}} \cdot \frac{\overline{A_c C}}{\overline{A_c B}} \cdot \frac{\overline{B_c A}}{\overline{B_c C}} = +1\ ,$$

sau încă:

$$(5)\qquad \frac{\overline{A_b C}}{\overline{A_b B}} \cdot \frac{\overline{B_a A}}{\overline{B_a C}} \cdot \frac{\overline{C_a B}}{\overline{C_a A}} = \frac{\overline{A_c B}}{\overline{A_c C}} \cdot \frac{\overline{B_c C}}{\overline{B_c A}} \cdot \frac{\overline{C_b A}}{\overline{C_b B}}\ ,$$

din care rezultă că dacă una din cele două grupe este formată din trei ceviene, a doua grupă este deasemenea formată din trei ceviene.

Așadar, condițiunea cerută va rezulta impunând triunghiului $A B C$ numai una din condițiunile (3) și (4). Să presupunem că impunem condițiunea (3). In acest caz, în virtutea primei relațiuni (2), deducem din condițiunea (3) pe următoarea:

$$(6)\qquad \overline{C A_b} = \overline{A_b B}$$

adică A_b trebuie să fie mijlocul lui $\overline{C B}$, dar atunci și C_b este mijlocul laturei $B A$ (deoarece $A_b C_b \| A C$), deci:

$$A_b C_b = \frac{1}{2}\overline{A C}\ .$$

De altă parte:

$$\overline{B_c A_a} = \overline{A_b C_b} = \frac{1}{2}\overline{A C} = \frac{1}{2}\overline{A' C'}\ ,$$

deci avem deasemenea că B_c este mijlocul laturei $\overline{B' C'}$ (evident în virtutea simetriei în raport cu punctul O).

Acest lucru nu se întâmplă pentru orice triunghiu. Ne propunem deci să găsim relațiunea drintre laturile triunghiului $A B C$ care satisfac relațiunii (3). Să însemnăm:

$$\overline{A B} = c\ ,\quad \overline{B C} = a\ ,\quad \overline{C A} = b\ ,$$
$$\overline{C' C_b} = x\ ,\quad \overline{A' A_b} = y\ .$$

In cercul O, punctul A_b fiind mijlocul coardei $\overline{B C}$, avem relațiunea:

$$\left(\frac{\overline{C B}}{2}\right)^2 = \overline{A' A_b} \cdot \overline{A_b C'}$$

sau:

$$(7)\qquad a^2 = 4y\left(\frac{b}{2} + x\right)$$

Asemenea, punctul C_b fiind mijlocul coardei $\overline{B A}$, avem relațiunea:

$$\left(\frac{\overline{A B}}{2}\right)^2 = \overline{C' C_b} \cdot \overline{C_b A'}$$

sau:

$$(8)\qquad c^2 = 4x\left(\frac{b}{2} + y\right)$$

Dar, deoarece:

$$\overline{A_b C_b} = \frac{1}{2}\overline{A C}\ ,$$

avem relațiunea:

$$\overline{A' A_b} + \overline{C_b C'} = \frac{1}{2}\overline{A C}$$

sau:

$$(9) \qquad x+y=\frac{b}{2}$$

Totul revine prin urmare la a elimina x şi y între relaţiunile (7), (8), (9). Să punem în acest scop:

$$2x=u\,,\quad 2y=v\,.$$

Relaţiunile (7), (8) şi (9) devin:

$$(10)\quad c^2=u(b+v)\,,\quad a^2=v(b+u)\quad \text{şi}\quad u+v=b,$$

sau încă:

$$2uv=a^2+c^2-b^2\,;\quad u-v=\frac{c^2-a^2}{b}$$

şi

$$u+v=b\,,$$

de unde deducem:

$$u=\frac{c^2+b^2-a^2}{2b}\,,\qquad v=\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$$

şi ca urmare relaţiunea de condiţiune:

$$(11)\quad (c^2+b^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)=2b^2(a^2+c^2-b^2)$$

Evident există o infinitate de triunghiuri neasemenea care satisfac relaţiunii (11); şi cum relaţiunea (11) este omogenă în raport cu cele trei laturi, putem să ne mai dăm o relaţiune între a, b, c compatibilă cu (11). Se vede însă că nici un triunghiu dreptunghiu nu satisface relaţiunii (11).

Au dat soluţiuni complecte la punctele 1° şi 2° d-nii: *Vâlceanu N. Justin, Coşniţă Cezar, Rusu Liviu, Rusu D. C-tin* (bacalaureat, Constanţa), *Teodorescu Stavrache, Mihăileanu N. N.* (Constanţa), *Ionescu-Ţiu D. C., Marineanu Traian, Crivăţ I. Vladimir, Carp Ignat, Popa Gh. Ioan, Bujoreanu V., Popescu D. Nicolae, Schuller David.*

D-l *Ghişoiu I. Petre* a rezolvat chestiunile 1° şi 2°, folosind relaţiunile trigonometrice, iar d-nii *Mihăileanu N. N.* (Constanţa) şi *Nichiforescu Gh.* cu ajutorul geometriei analitice.

O N T.

1118. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \arcsin x+\arccos y=k_1\pi+a_1 \\ \arccos y+\operatorname{arc\,tg} z=k_2\pi+a_2 \\ \operatorname{arc\,tg} z+\arcsin x=k_3\pi+a_3 \end{cases}$$

Să se considere cazul:

$$k_1=1,\quad k_2=2,\quad k_3=3,\quad a_1+a_2+a_3=0\,.$$

IOAN S. TRICA

Adunând cele trei ecuaţii ale sistemului dat şi împărţind prin 2, avem:

$$\arcsin x+\arccos y+\operatorname{arc\,tg} z=\frac{(k_1+k_2+k_3)\pi+a_1+a_2+a_3}{2}$$

Scâzând din această ecuaţie, pe rând ecuaţiile sistemului dat, obţinem sistemul echivalent:

$$\begin{cases} \operatorname{arc\,tg} z=\dfrac{(k_2+k_3-k_1)\pi+a_2+a_3-a_1}{2} \\ \arcsin x=\dfrac{(k_3+k_1-k_2)\pi+a_3+a_1-a_2}{2} \\ \arccos y=\dfrac{(k_1+k_2-k_3)\pi+a_1+a_2-a_3}{2} \end{cases}$$

De aci deducem cu uşurinţă:

$$\begin{cases} x=\sin\dfrac{(k_3+k_1-k_2)\pi+a_3+a_1-a_2}{2} \\ y=\cos\dfrac{(k_1+k_2-k_3)\pi+a_1+a_2-a_3}{2} \\ z=\operatorname{tg}\dfrac{(k_2+k_3-k_1)\pi+a_2+a_3-a_1}{2} \end{cases}$$

Acesta este sistemul de soluţii a sistemului dat. In cazul particular din enunţ, sistemul (1) devine:

$$\begin{cases} x=\sin(\pi-a_2)=\sin a_2 \\ y=\cos(-a_3)=\cos a_3 \\ z=\operatorname{tg}(2\pi-a_1)=-\operatorname{tg} a_1 \end{cases}$$

Soluţii date de dnii: *Chiriac C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Chiriţă Mihail* (lic. Milit., Craiova), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru Marin* (lic. Milit., Craiova), *Curchi Ioan* (student, Bucureşti), *Fofiu Cornel* (bacalaureat, Beiuş), *Godeanu O. Vasile* (lic. Milit, Craiova), *Ivănescu Cezar* (bacalaureat, Bârlad), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Margulius Marius* (Bucureşti), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Milea E.* (Sub.-Lt.), *Motoc D. Mircea* (Oltenita), *Negrea A. Leonte Mircea* (licenţiat în Matematici), *Patraulea Radu* (bacalaureat), *Sâmbotin Gh.* (Sub-Lt.), *Stefănescu Anibal* (Şc. Polit., Bucureşti) şi *Tica Petre Marin* (Sub-Lt.)

1120. — *Să se demonstreze egalitatea:*

$$\frac{abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}=\frac{h_a\,h_b\,h_c}{(h_a+h_b)(h_a+h_c)(h_b+h_c)}$$

ION MARGINEANU

Folosind relaţiile cunoscute într'un triunghiu:

$$h_a=\frac{2s}{a}\,,\qquad h_b=\frac{2s}{b}\,,\qquad h_c=\frac{2s}{c}\,,$$

membrul al 2-lea al egalității cerute pe care să'l insemnăm cu E, se poate scri succesiv:

$$E=\frac{\frac{2s}{a}\cdot\frac{2s}{b}\cdot\frac{2s}{c}}{\left(\frac{2s}{a}+\frac{2s}{b}\right)\left(\frac{2s}{a}+\frac{2s}{c}\right)\left(\frac{2s}{b}+\frac{2s}{c}\right)}=$$

$$\frac{\frac{8s^3}{abc}}{8s^3\cdot\frac{a+b}{ab}\cdot\frac{a+c}{ac}\cdot\frac{b+c}{bc}}=\frac{abc}{(a+b)(a+c)(b+c)},$$

care este tocmai primul membru și astfel egalitatea dată este stabilită.

Soluții date de d-rele: *Ichim Ermina* (Iași) și *Roșca St. Veronica* (lic. Internat, Craiova), și de d-nii: *Anastasescu Mihail* (lic. Târgoviște), *Arbter Emil* (lic Beiuș), *Băleanu D-tru*, (lic Milit, București), *Bedron Iosif* (lic Beiuș), *Bercea Clement* (lic. Milit., Iași), *Boisnard Jean* (lic. Spiru-Haret, București), *Chiriac C-tin* (lic. Milit., Iași), *Chiriță Mihail* (lic. Milit., Craiova), *Cismigiu Marius* (lic. Mihai Viteazul, București), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M. Marin* (lic. Milit. Craiova), *Constantin G. Petre* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Curchi Ioan* (student, București), *Dan T. Traian* (Șc. Polit., Timișoara), *Dima D. Gheorghe* (bacalaureat, Beiuș), *Fofiu Cornel* (Șc. Polit., Timișoara), *Georgescu St. Ștefan* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Ghiocel V. Vasile* (lic., Giurgiu), *Godeanu I. Vasile* (Lic. Milit., Craiova), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Ivănescu Cezar* (bacalaureat, Bârlad), *Ionescu Emil* (bacalaureat, Craiova), *Lățea P. C-tin* (Șc. Milit. de Artilerie), *Mazăliu Panaite* (lic Internat, Iași), *Mașcaș Petru* (lic. Beiuș), *Mehedinți D. D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Mereuță Emilian* (student, București), *Mihălcea N. Nicolae* (Beiuș), *Milea È. G.* (Sub-Lt.), *Motoc D. Mircea* (Oltenița), *Negrea A. Leonte Mircea* (licențiat în Matematici), *Nenciulescu H.* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Patraulea N. Radu* (bacalaureat), *Păunescu N.* (lic. Milit., Craiova), *Popa Gh. Ioan* (București), *Popa Nicolae* (lic. Beiuș), *Popa B. Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Popescu Adrian* (student), *Popescu C. Ștefan* (lic. Milit., Craiova), *Porumbescu D.* (Tg-Ocna), *Predoescu I. Marin* (lic. Buzești, Craiova), *Procopiescu Mihail* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Rezeanu P. Marin*, *Rogojan Alexandru* (Șc. Polit., Timișoara), *Sandovici Vasile* (lic. Internat, Iași), *Santto F. Georges* (lic. Internat, Iași), *Săm botin Gh.* (Sub-Lt.), *Segărceanu N. Marin* (lic. Milit., Craiova) *Stefănescu Anibal* (Șc. Polit., București), *Stern M. Nicolae* (lic. Beiuș), *Stoica* (Sub.-Lt.), *Süli Mihai* (Șc. Polit., Timișoara), *Theoharide Lucian* (Șc. Preg. de Ofițeri, București), *Tica P. Marin* (Sub-Lt.), *Trică Ioan* (Constanța), *Trifănescu Iorgu* (Craiova), *Tutunaru Gr. D-tru* (Șc. Ofițeri de Artilerie), *Vasiliu Gh. Leoben* (Inginer) și *Vuntejanu C-tin* (lic. Milit., Tg.-Mureș).

PROBLEME PROPUSE

1185. — Se cere patratul perfect din cinci cifre $abcde$ astfel ca numărul cbe să fie cub perfect, iar numărul ad să fie patrat perfect.

MIRCEA D MOTOC

1186. — Se cere restul împărțirei prin 11 a numărului:

$$N=\sum_{n=1}^{10} C_{1929}^{n},$$

unde C_m^p inseamnă combinări de m obiecte luate câte p.

C-TIN V. COSTACHESCU

1187. — Printr'un punct M al unei laturi a unui poligon convex A B C D E F A, să se ducă o dreptă, care să'l împartă în două părți echivalente.

MANOLE TOUSSAINT

1188. — Să se demonstreze că cercul circumscris unui triunghiu, este locul geometric al punctelor a căror proecție pe înălțimele triunghiului, dau un triunghiu asemenea celui de referință.

C-TIN P. LATEA

1189. — Să se demonstreze că polinomul:

$$\frac{(p-1)\,p\,(2p-1)}{6}-\frac{p\,(p^2-1)}{3}x+\sum_{k=2}^{p}(k-1)\,x^k,$$

se divide prin $(x-1)^2$ și să se afle câtul.

V. ALACI

1190. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=7 \\ x^2+z^2+xz=13 \\ y^2+z^2+yz=19 \end{cases}$$

ADRIAN POPESCU

1191. — Notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se arate că:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos A & \cos B & \cos C \\ \dfrac{r_a^2}{h_a+2r_a} & \dfrac{r_b^2}{h_b+2r_b} & \dfrac{r_c^2}{h_c+2r_c} \end{vmatrix}=0.$$

CEZAR IVANESCU

1192. — Să se stabilească relația:

$$8R^3(\sin A+h_c)(\sin B+h_a)(\sin C+h_b)=abc(1+a)(1+b)(1+c),$$

notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

D-TRU GR. TUTUNARU

INFORMAȚIUNI

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dens le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**

Administration :
SPINX, 75, Rue Philippe Baucq

LA REDACȚIA „REVISTEI MATEMATICE DIN TIMIȘOARA SE PRIMESC ABONAMENTE PENTRU ANUL AL V-LEA (MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)

DE BOLETIN MATEMATICO

COSTUL UNUI ABONAMENT FIIND DE 300 LEI ȘI PENTRU ANUL AL III-LEA (MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)

DE BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

COSTUL ABONAMENTULUI FIIND DE 125 LEI, PUBLICATE ÎN BUENOS AIRES; AMĂNDOUĂ 400 LEI

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Abonamentul pe anul XIII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa :

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL XIII. 15 MAIU 1933 No. 3.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI EXPRESIUNILE RESTULUI SI CATULUI IMPARTIREI A DOUA POLINOAME.
2. NOTE MATEMATICE: 5 6
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 1124 1132, 1135.
5 PROBLEME PROPUSE: 1193-1200.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Artegrafice „Tipografia Românească"

Avem plăcerea a anunţa că începând dela 15 Aprilie 1933, mai face parte dintre membrii „Revistei Matematice din Timişoara“ şi *D-l Nicolae G. Botea,* licenţiat în Matematici, Calea Floreasca 46, Bucureşti 3.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara“ este pentru anul XIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare

---

ANUL XIII — NO. 3. TIMISOARA, 15 MAIU 1933

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie.

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Şcoala Politechnică din Timişoara.

EXPRESIUNILE RESTULUI ŞI CÂTULUI IMPĂRŢIREI A DOUĂ POLINOAME*

de V. ALACI

Ne propunem a găsi direct restul şi câtul împărţirei polinomului:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_px^p,$$

prin $(a-x)^q$, unde p şi q sunt întregi pozitivi, $q\leq p$.

Folosim pentru dezvoltarea lui $f(x)$ formula lui *Taylor* şi împărţim totodată prin $(a-x)^q$, avem:

$$\frac{f(x)}{(a-x)^q}=\frac{f(a)-\frac{f'(a)}{1}(a-x)+\frac{f''(a)}{2!}(a-x)^2-\ldots+(-1)^{q-1}\frac{f^{(q-1)}(a)}{(q-1)!}(a-x)^{q-1}}{(a-x)^q}+$$
$$(-1)^q\left[\frac{f^{(q)}(a)}{q!}-\frac{f^{(q+1)}(a)}{(q+1)!}(a-x)+\frac{f^{(q+2)}(a)}{(q+2)!}(a-x)^2-\ldots+(-1)^{p-q}\frac{f^{(p)}(a)}{p!}(a-x)^{p-q}\right]$$

Insemnând cu $R(x)$ şi $Q(x)$ restul şi câtul căutat, avem:

$$(1)\qquad R(x)=f(a)-\frac{f'(a)}{1}(a-x)+\frac{f''(a)}{2!}(a-x)^2-\ldots+(-1)^{q-1}\frac{f^{(q-1)}(a)}{(q-1)!}(a-x)^{q-1}$$

$$(2)\qquad (Q\,x)=(-1)^q\left[\frac{f^{(q)}(a)}{q!}-\frac{f^{(q+1)}(a)}{(q+1)!}(a-x)+\frac{f^{(q+2)}(a)}{(q+2)!}(a-x)^2-\ldots+(-1)^{p-q}\frac{f^{(p)}(a)}{p!}(a-x)^{p-q}\right]$$

Dacă dezvoltăm însă pe $R(x)$ şi $Q(x)$ după puterile lui x, putem scri după formula lui *Maclaurin:*

$$(3)\qquad R(x)=R(0)+\frac{R'(0)}{1}x+\frac{R''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{R^{(q-1)}(0)}{(q-1)!}x^{q-1}$$

$$(4)\qquad Q(x)=Q(0)+\frac{Q'(0)}{1}x+\frac{Q''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{Q^{(p-q)}(0)}{(p-q)!}x^{p-q},$$

unde trebuesc calculaţi coeficienţii.

Expresiunea restului. Pentru a calcula un coeficient oarecare $\frac{R^{(k)}(0)}{k!}$, $(k=0,1,2,\ldots q-1)$ din expresiunea (3) derivăm de k ori în raport cu x, relaţiunea (1), facem apoi $x=0$ şi obţinem:

$$(5)\qquad \frac{R^{(k)}(0)}{k!}=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}-\Gamma^1_{k+1}\frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}a+\Gamma^2_{k+1}\frac{f^{(k+2)}(a)}{(k+2)!}a^2-\ldots+(-1)^{q-k-1}\Gamma^{q-k-1}_{k+1}\frac{f^{(q-1)}(a)}{(q-1)!}a^{q-k-1}=$$

* Acest articol este o parte din articolul ce l'am publicat în „Bulletin Scientifique de l'école Polytechnique de Timişoara" Tome IV, fasc. 3—4, sub titlu: *„Les expressions du reste et du quotient de la division de deux polynômes"* şi îl redau aci pentru a da posibilitatea corespondenţilor nostrii să rezolve cu uşurinţa problemele 1180, 1189 din „R. M. T." şi altele analoage cu ele.

$$\left(a_k+\Gamma_{k+1}^1 a_{k+1}a+\Gamma_{k+1}^2 a_{k+2}a^2+\ldots+\Gamma_{k+1}^{p-k}a_p a^{p-k}\right)-\Gamma_{k+1}^1\left(a_{k+1}a+\Gamma_{k+2}^1 a_{k+2}a^2+\right.$$

$$\left.\Gamma_{k+2}^2 a_{k+3}a^3+\ldots+\Gamma_{k+2}^{p-k-1}a_p a^{p-k}\right)+\Gamma_{k+1}^2\left(a_{k+2}a^2+\Gamma_{k+3}^1 a_{k+3}a^3+\ldots+\Gamma_{k+3}^{p-k-2}a_p a^{p-k}\right)-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{q-k-1}\Gamma_{k+1}^{q-k-1}\left(a_{q-1}a^{q-k-1}+\Gamma_q^1 a_q a^{q-k}+\ldots+\Gamma_q^{p-q+1}a_p a^{p-k}\right),$$

unde în general:

$$\Gamma_m^n=\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}.$$

Ordonând expresiunea (5) după puterile lui a, avem:

$$(6)\qquad \frac{R^{(k)}(0)}{k!}=a_k+\sum_{i=1}^{q-k-1}\left(\Gamma_{k+1}^i-\Gamma_{k+1}^1\Gamma_{k+2}^{i-1}+\ldots+(-1)^{i-1}\Gamma_{k+1}^{i-1}\Gamma_{k+1}^1+(-1)^i\Gamma_{k+1}^i\right)a_{i+k}a^i+$$

$$\sum_{i=o}^{p-q}\left(\Gamma_{k+1}^{q-k+i}-\Gamma_{k+1}^1\Gamma_{k+2}^{q-k+i-1}+\ldots+(-1)^{q-k-1}\Gamma_{k+1}^{q-k-1}\Gamma_q^{i+1}\right)a_{q+i}a^{q-k+i}$$

Vom calcula întâi coeficientul numeric al lui a^i, care se poate scri succesiv:

$$\Gamma_{k+1}^i-\Gamma_{k+1}^1\Gamma_{k+2}^{i-1}+\ldots+(-1)^{i-1}\Gamma_{k+1}^{i-1}\Gamma_{k+i}^1+(-1)^i\Gamma_{k+1}^i=\Gamma_{k+1}^i\left[1-\frac{i}{1}+\frac{i(i-1)}{2!}-\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^{i-1}\frac{i}{1}+(-1)^i\right]=\Gamma_{k+1}^i\left(1-C_i^1+C_i^2-\ldots+(-1)^{i-1}C_i^{i-1}+(-1)^i C_i^i\right)$$

Dar, dacă în identitatea evidentă:

$$(1-x)^i=1-C_i^1x+C_i^2x^2-\ldots+(-1)^iC_i^ix^i,$$

facem $x=1$, deducem:

$$1-C_i^1+C_i^2-\ldots+(-1)^{i-1}C^{i-1}+(-1)^iC_i^i=0\ ,$$

astfel că găsim:

$$\Gamma_{k+1}^i-\Gamma_{k+1}^1\Gamma_{k+2}^{i-1}+\ldots+(-1)^{i-1}\Gamma_{k+1}^{i-1}\Gamma_{k+i}^1+(-1)^i\Gamma_{k+1}^i=0,$$

pentru: $$i=1,2,\ldots,(q-k-1).$$

Rezultă de aci că coeficienţii lui a, $a^2,\ldots a^{q-k-1}$ din expresia (6) sunt nuli şi rămâne:

$$(7)\qquad \frac{R^{(k)}(0)}{k!}=a_k+\sum_{i=o}^{p-q}\left(\Gamma_{k+1}^{q-k+i}-\Gamma_{k+1}^1\Gamma_{k+2}^{q-k+i-1}+\ldots+(-1)^{q-k-1}\Gamma_{k+1}^{q-k-1}\Gamma_q^{i+1}\right)a_{q+i}a^{q-k+i}$$

Vom calcula acum şi coeficientul numeric al lui a^{q-k+i}, care se poate scri:

$$(8)\qquad \Gamma_{k+1}^{q-k+i}-\Gamma_{k+1}^1\Gamma_{k+2}^{q-k+i-1}+\ldots+(-1)^{q-k-1}\Gamma_{k+1}^{q-k-1}\Gamma_q^{i+1}=\Gamma_{k+1}^{q-k+i}\left[1-\frac{q-k+i}{1}+\right.$$

$$\left.\frac{(q-k+i)(q-k+i-1)}{2!}-\ldots+(-1)^{q-k-1}\frac{(q-k+i)(q-k+i-1)\ldots(i+2)}{(q-k-1)!}\right]=$$

$$\Gamma_{k+1}^{q-k+i}\left(1-C_{q-k+i}^1+C_{q-k+i}^2-\ldots+(-1)^{q-k-1}C_{q-k+i}^{q-k-1}\right)$$

Putem calcula coeficientul din paranteză, considerând identitatea evidentă:

$$(1-x^{q-k})(1-x)^{q-k+i-1}=(1+x+x^2+\ldots+x^{q-k-1})(1-x)^{q-k+i}$$

şi egalând coeficienţii termenului în x^{q-k-1} din ambii membrii, obţinem:

$$(-1)^{q-k-1} C_{q-k+i-1}^{q-k-1} = 1 - C_{q-k+i}^{1} + C_{q-k+i}^{2} - \ldots + (-1)^{q-k-1} C_{q-k+i}^{q-k-1},$$

In virtutea acestei relaţiuni, expresiunea (8) se poate scri:

$$\Gamma_{k+1}^{q-k+i} - \Gamma_{k+1}^{1}\Gamma_{k+2}^{q-k+i-1} + \ldots + (-1)^{q-k-1}\Gamma_{k+1}^{q-k-1}\Gamma_{q}^{i+1} = (-1)^{q-k-1}\Gamma_{k+i}^{q-k+i} C_{q-k+i-1}^{q-k-1}$$

$$= (-1)^{q-k-1}\Gamma_{k+1}^{q-k+i}\Gamma_{i+1}^{q-k-1} = (-1)^{q-k-i}\Gamma_{k+1}^{q-k+i}\Gamma_{q-k}^{i}$$

Rezultă că relaţiunea (7) devine:

$$\frac{R^{(k)}(0)}{k!} = a_k + (-1)^{q-k-1}\sum_{i=0}^{p-q}\Gamma_{k+1}^{q-k+i}\Gamma_{q-k}^{i} a_{q+i} a^{q-k+i}, \tag{9}$$

relaţiune adevărată pentru: $k = 0, 1, 2, \ldots, (q-1)$ şi în virtutea căreia coeficienţii restului $R(x)$ sunt astfel calculaţi.

Expresiunea (3) se poate acum scri:

$$R(x) = \left[a_0 + (-1)^{q-1}\sum_{i=0}^{p-q}\Gamma_{q}^{i} a_{q+i} a^{q+i}\right] + \left[a_1 + (-1)^{q-2}\sum_{i=0}^{p-q}\Gamma_{2}^{q+i-1}\Gamma_{q-1}^{i} a_{q+i} a^{q+i-1}\right] x + \tag{10}$$

$$\left[a_2 + (-1)^{q-3}\sum_{i=0}^{p-q}\Gamma_{3}^{q+i-2}\Gamma_{q-2}^{i} a_{q+i} a^{q+i-2}\right] x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \left[a_{q-2} - \sum_{i=0}^{p-q}\Gamma_{q-1}^{i+2}\Gamma_{2}^{i} a_{q+i} a^{i+2}\right] x^{q-2} + \left[a_{q-1} + \sum_{i=0}^{p-q}\Gamma_{q}^{i+1} a_{q+i} a^{i+1}\right] x^{q-1}$$

Aceasta este expresiunea interesantă a restului împărţirei polinomului:

$$a_0 + a_1 x + a^2 x^2 + \ldots + a_p x^p,$$

prin $(a-x)^q$ şi acest rest este exprimat direct în funcţie de coeficienţii deîmpărţitului şi împărţitorului.

Consecinţă. Pentru ca restul împărţirei polinomului:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p,$$

prin $(a-x)^q$ să fie identic nul, trebuesc satisfăcute următoarele condiţiuni ce rezultă cu uşurinţă din expresiunea (10) a lui $R(x)$; anume:

$$a_0 = (-1)^q \sum_{i=0}^{p-q}\Gamma_{q}^{i} a_{q+i} a^{q+i}$$

$$a_1 = (-1)^{q-1}\sum_{i=0}^{p-q}\Gamma_{2}^{q+i-1}\Gamma_{q-1}^{i} a_{q+i} a^{q+i-1}$$

$$a_2 = (-1)^{q-2}\sum_{i=0}^{p-q}\Gamma_{3}^{q+i-2}\Gamma_{q-2}^{i} a_{q+i} a^{q+i-2} \tag{10'}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{q-2} = \sum_{i=0}^{p-q}\Gamma_{q-1}^{i+2}\Gamma_{2}^{1} a_{q+i} a^{i+2}$$

$$a_{q-1} = -\sum_{i=0}^{p-q}\Gamma_{q}^{i+1} a_{q+i} a^{i+1}$$

Aceste relaţii exprimă pe primii q coeficienţi ai polinomului $f(x)$ în funcţie de cei următori.

Cazuri particulare. 1. Pentru $q = 2$, expresiunea (10) se reduce la următoarea:

(11) $$R(x) = a_0 - \sum_{i=0}^{p-2} (i+1)\, a_{2+i}\, a^{2+i} + \left(a_1 + \sum_{i=0}^{p-2} (i+2)\, a_{2+i}\, a^{i+1} \right) x =$$

$$a_0 + a_1 x - \sum_{i=0}^{p-2} \left[(i+1)\, a - (i+2)\, x \right] a_{2+i}\, a^{i+1}$$

2. Pentru $q = 3$, expresiunea (10) devine:

(12) $$R(x) = a_0 + \sum_{i=0}^{p-3} \frac{(i+1)\ (i+2)}{2}\, a_{3+i}\, a^{3+i} + \left[a_1 - \sum_{i=0}^{p-3} (i+1)\ (i+3)\, a_{3+i}\, a^{2+i} \right] x$$

$$+ \left[a_2 + \sum_{i=0}^{p-3} \frac{(i+2)(i+3)}{2}\, a_{3+i}\, a^{1+i} \right] x^2 =$$

$$\left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{i=0}^{p-3} \frac{(i+1)(i+2)}{2}\, a^2 - (i+1)(i+3)\, a\, x + \frac{(i+2\ (i+3)}{2}\, x^2 \right] a_{3+i}\, a^{1+i}$$

Aplicații. 1. *Să se afle direct restul împărțirei lui* x^p *prin* $(1-x)^q$, p *și* q *întregi pozitivi,* $p \geqq q$.

Folosim formula (10), observând că în acest caz:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{p-1} = 0, \qquad a_p = 1, \qquad a = 1,$$

și obținem:

$$R(x) = (-1)^{q-1} \left[\Gamma_q^{p-q} - \Gamma_2^{p-1} \Gamma_{q-1}^{p-q} x + \Gamma_3^{p-2} \Gamma_{q-2}^{p-q} x^2 - \ldots + (-1)^{q-2} \Gamma_{q-1}^{i+2} \Gamma_2^{p-q} x^{q-2} + (-1)^{q-1} \Gamma_q^{p-q+1} x^{q-1} \right]$$

In cazul particular, $p = 5$, $q = 3$, restul este:

$$R(x) = \Gamma_3^2 - \Gamma_2^4 \Gamma_2^2 x + \Gamma_3^3 x^2 = 6 - 15 x + 10 x^2$$

Ținând seamă de relația:

$$x^p = (1-x)^q\, Q(x) + R(x),$$

se obține pentru $x = 1$, identitatea:

$$\Gamma_q^{p-q} - \Gamma_q^{p-1} \Gamma_{q-1}^{p-q} + \Gamma_3^{p-2} \Gamma_{q-2}^{p-q} - \ldots + (-1)^{q-2} \Gamma_q^{i+2}{}_1 \Gamma_2^{p-q} + (-1)^{q-1} \Gamma_q^{p-q+1} = (-1)^{q-1}$$

2. *Să se afle direct restul împărțirei polinomului:*

$$a_0 + a_1 x + x^2 + 2 x^3 + \ldots + (p-1) x^p,$$

prin $(1-x)^2$.

Aplicând formula (11) și observând că în acest caz:

$$a_{2+i} = i + 1, \qquad \text{pentru} \qquad i = 0, 1, 2 \ldots, p-2, \qquad \text{și} \qquad a = 1,$$

avem:

$$R(x) = a_0 - \sum_{i=0}^{p-2} (i+1)^2 + \left[a_1 + \sum_{i=0}^{p-2} (i+1)\ (i+2) \right] x,$$

sau:

$$R(x) = a_0 - \frac{(p-1)\, p\, (2p-1)}{6} + \left[a_1 + \frac{p\,(p^2-1)}{3} \right] x.$$

3. *Să se afle direct restul împărțirei polinomului:*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^p,$$

prin $(1-x)^3$.

Folosim formula (12), observând că în acest caz:

$$a_{3+i} = 1, \qquad \text{pentru} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, (p-3); \qquad \text{și} \qquad a = 1,$$

și obținem:

$$R(x)=a_0+\sum_{i=0}^{p-1}\frac{(i+1)\ (i+2)}{2}\left[a_1-\sum_{i=0}^{p-3}(i+1)\ (i+3)\right]x+\left[a_2+\sum_{i=0}^{p-3}\frac{(i+2)\ (i+3)}{2}\right]x^2$$

Efectuând sumele, avem:

$$R(x)=a_0+\frac{(p-2)(p-1)p}{6}+\left[a_1-\frac{(p-2)(p-1)(2p+3)}{6}\right]x+\left[a_2+\frac{p(p^2-1)}{6}-1\right]x^2$$

4. *Să se afle direct restul împărţirei polinomului:*

$$3-5x+6x^2-2x^3-x^4+5x^5,$$

prin $(1-x)^3$.

Aplicând formula (12) şi observând că în acest caz:

$$a_0=3,\quad a_1=-5,\quad a_2=6,\quad a_3=-2,\quad a_4=-1,\quad a_5=5\quad \text{şi}\quad p=5,$$

obţinem pentru expresiunea restului căutat:

$$R(x)=3+\sum_{i=0}^{2}\frac{(i+1)\ (i+2)}{2}a_{3+i}+$$

$$\left[-5-\sum_{i=0}^{2}(i+1)\ (i+3)\ a_{3+i}\right]x+6+\sum_{i=0}^{2}\frac{(i+2)\ (i+3)}{2}a_{3+i}\Bigg]x^2=28-66x+44x^2$$

Expresiunea câtului. Pentru a avea exprsiunea câtului, trebuie a calcula un coeficient oarecare $\frac{Q_{(0)}^{(k)}}{k!}$, $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,(p-q)$ din expresiunea (4). Vom deriva pentru aceasta de k ori în raport cu x expresiunea (2), facem apoi $x=0$ şi obţinem:

$$\frac{Q_{(0)}^{(k)}}{k!}=(-1)^q\left[\frac{f^{(q+k)}(a)}{(q+k)!}-\Gamma_{k+1}^{1}\frac{f^{(q+k+1)}(a)}{(q+k+1)!}a+\Gamma_{k+1}^{2}\frac{f^{(q+k+2)}(a)}{(q+k+2)!}a^2-\ldots+(-1)^{p-q-k}\Gamma_{k+1}^{p-q-1}\frac{f^{(p)}(a)}{p!}a^{p-q-k}\right]$$

Scriind dezvoltat derivatele din membrul al 2-lea, avem:

$$\frac{Q_{(0)}^{(k)}}{k!}=(-1)^q\Big[a_{q+k}+\Gamma_{q+k+1}^{1}a_{q+k+1}a+\ldots+\Gamma_{q+k+1}^{p-q-k}a_p a^{p-q-k})-\Gamma_{k+1}^{1}(a_{q+k+1}a+$$

$$\Gamma_{q+k+2}^{1}a_{q+k+2}a^2+\ldots+\Gamma_{q+k+2}^{p-q-k-1}a_p a^{p-q-k})+\ldots+(-1)^{p-q-k}\Gamma_{k+1}^{p-q-k}a_p a^{p-q-k}\Big]$$

Ordonând după puterile lui a, putem scri:

$$\frac{Q_{(0)}^{(k)}}{k!}=(-1)^q\Big\{a_{q+k}+\sum_{\alpha=1}^{p-q-k}\Big[\Gamma_{q+k+1}^{\alpha}-\Gamma_{k+1}^{1}\Gamma_{q+k+2}^{\alpha-1}+\Gamma_{k+1}^{2}\Gamma_{q+k+2}^{\alpha-2}-\ldots$$

$$\ldots+(-1^{\alpha-1}\Gamma_{k+1}^{\alpha-1}\Gamma_{q+k+\alpha}^{1}+(-1)^{\alpha}\Gamma_{k+1}^{\alpha}\Big]a_{q+k+\alpha}a^{\alpha}\Big\}\tag{13}$$

Să calculăm coeficientul numeric al lui a^α.

Ţinând seamă că:

$$\Gamma_m^n=C_{m+n-1}^{n},$$

putem scri:

$$\Gamma_{q+k+1}^{\alpha}-\Gamma_{k+1}^{1}\Gamma_{q+k+2}^{\alpha-1}+\Gamma_{k+1}^{2}\Gamma_{q+k+3}^{\alpha-2}-\ldots+(-1)^{\alpha-1}\Gamma_{k+1}^{\alpha-1}\Gamma_{q+k+\alpha}^{1}+(-1)^{\alpha}\Gamma_{k+1}^{\alpha}\tag{14}$$

$$=C_{q+k+\alpha}^{\alpha}-\Gamma_{k+1}^{1}C_{q+k+\alpha}^{\alpha-1}+\Gamma_{k+1}^{2}C_{q+k+\alpha}^{\alpha-2}-\ldots+(-1)^{\alpha-1}\Gamma_{k+1}^{\alpha-1}C_{q+k+\alpha}^{1}+(-1)^{\alpha}\Gamma_{k+1}^{\alpha}$$

Pentru a calcula membrul al 2-lea al acestei egalităţi, considerăm identitatea evidentă:

$$(1-x)^{q+\alpha-1}=\frac{(1-x)^{q+k+\alpha}}{(1-x)^{k+1}}\tag{15}$$

Presupunând, $-1<x<1$, putem dezvolta în serie absolut convergentă pe $\frac{1}{(1-x)^{k+1}}$, după formula lui *Maclaurin*, şi identitatea (15) devine:

$$(1-x)^{q+\alpha-1}=(1-x)^{q+k+\alpha}\left(1+\Gamma_{k+1}^{1}x+\Gamma_{k+2}^{2}x^{2}+\ldots+\Gamma_{k+1}^{\alpha}x^{\alpha}+\ldots\right)$$

Identificând coeficienții lui x^{α} din ambii membrii, obținem:

$$C_{q+\alpha-1}^{\alpha}=C_{q+k+\alpha}^{\alpha}-\Gamma_{k+1}^{1}C_{q+k+\alpha}^{\alpha-1}+\Gamma_{k+1}^{2}C_{q+k+\alpha}^{\alpha-2}+\ldots+(-1)^{\alpha-1}\Gamma_{k+1}^{\alpha-1}C_{q+k+\alpha}^{1}+(-1)^{\alpha}\Gamma_{k+1}^{\alpha}$$

In virtutea acestei egalități, relațiunea (14) devine:

$$\Gamma_{q+k+1}^{\alpha}-\Gamma_{k+1}^{1}\Gamma_{q+k+2}^{\alpha-1}+\Gamma_{k+1}^{2}C_{q+k+3}^{\alpha-2}+\ldots+(-1)^{\alpha-1}\Gamma_{k+1}^{\alpha-1}\Gamma_{q+k+\alpha}^{1}+(-1)^{\alpha}\Gamma_{k+1}^{\alpha}=C_{q+\alpha-1}^{\alpha}=\Gamma_{q}^{\alpha}$$

Ținând seamă de această relațiune, expresiunea (13) se poate scri:

$$\frac{Q^{(k)}(0)}{k!}=(-1)^{q}\left(a_{q+k}+\sum_{\alpha=1}^{p-q-k}\Gamma_{q}^{\alpha}a_{q+k+\alpha}a^{\alpha}\right) \tag{16}$$

Dacă aci luăm succesiv:

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (p-q)\ ,$$

avem pe rând toți coeficienții câtului căutat $Q(x)$ din expresiunea (4), care devine astfel:

$$Q(x)=\sum_{k=0}^{p-q}\frac{Q^{(k)}(0)}{k!}x^{k}=(-1)^{q}\sum_{k=0}^{p-q}\left(a_{q+k}+\Gamma_{q}^{1}a_{q+k+1}a+\Gamma_{q}^{2}a_{q+k+2}a^{2}+\ldots+\Gamma_{q}^{p-q-k}a_{p}a^{p-q-k}\right)x^{k}$$

Ordonând după puterile descrescătoare a lui x, avem:

$$Q(x)=(-1)^{q}\left[a_{p}x^{p-q}+(a_{p-1}+\Gamma_{q}^{1}a_{p}a)x^{p-q-1}+(a_{p-2}+\Gamma_{q}^{1}a_{p-1}a+\right.$$
$$\left.\Gamma_{q}^{2}a_{p}a^{2})x^{p-q-2}+\ldots+(a_{q}+\Gamma_{q}^{1}a_{q+1}a+\Gamma_{q}^{2}a_{q+2}a^{2}+\ldots+\Gamma_{q}^{p-q}a_{p}a^{p-q})\right] \tag{17}$$

Aceasta este expresiunea interesantă a câtului împărțirei polinomului.

$$f(x)=a_{0}+a_{1}x+a_{2}x^{2}+\ldots+a_{p}x^{p}\ ,$$

prin $(a-x)^{q}$ *și acest cât este exprimat direct în funcție de coeficienții deimpărțitului și împărțitorului.*

Câtul exprimat de relațiunea (17), observăm că depinde numai de ultimii $p-q+1$ coeficienți a lui $f(x)$.

Caz particular. Pentru, $p=q+2$ câtul dat de relația (17), devine:

$$Q(x)=(-1)^{q}\left[a_{p}x^{2}+(a_{p-1}+\Gamma_{q}^{1}a_{p}a)x+a_{p-2}+\Gamma_{q}^{1}a_{p-1}a+\Gamma_{q}^{2}a_{p}a^{2}\right] \tag{18}$$

Aplicații. 1. *Să se afle direct câtul împărțirei polinomului:*

$$3-5x+6x^{2}-2x^{3}-x^{4}+5x^{5}\ ,$$

prin $(1-x)^{3}$.

Aplicând formula (18), pentru că suntem în cazul:

$$p=5\ ,\quad q=3\ ,\quad (p=q+2).$$

Observând că în cazul nostru:

$$a_{3}=-2\ ,\qquad a_{4}=-1\ ,\qquad a_{5}=5\ ,\qquad a=1\ ,$$

găsim câtul căutat, care este:

$$Q(x)=-(5x^{2}+14x+25)$$

2. *Să se afle direct câtul împărțirei polinomului:*

$$x^{p}+bx+c$$

prin $(1-x)^{q}$, *p și q întregi positivi* $p\geqq q$.

Pentru a găsi expresiunea câtului folosim formula (17), observând că în acest caz:

$$a_{p}=1,\quad a_{p-1}=a_{p-2}=\ldots=a_{2}=0,\quad a_{1}=b,\quad a_{0}=c\quad \text{și}\quad a=1\ ,$$

Găsim astfel: $Q(x)=(-1)^{q}(x^{p-q}+\Gamma_{q}^{1}x^{p-q-1}+\Gamma_{q}^{2}x^{p-q-2}+\ldots+\Gamma_{q}^{p-q-1}x+\Gamma_{q}^{p-q})$

3. Să se afle direct câtul împărţirei polinomului:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^p ,$$

prin $(1 - x)^q$, $p \geqq q > 3$ *şi întregi*

Folosim formula (17), observând că avem:

$$a_{3+k} = 1, \qquad \text{pentru:} \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (p-3) \qquad \text{şi} \qquad a = 1,$$

Găsim cu uşurinţă:

$$Q(x) = (-1)^q [x^{p-q} + (1 + \Gamma_q^1) x^{p-q-1} + (1 + \Gamma_q^1 + \Gamma_q^2) x^{p-q-2} + \ldots + (1 + \Gamma_q^1 + \Gamma_q^2 + \ldots + \Gamma_q^{p-q-1}) x + (1 + \Gamma_q^1 + \Gamma_q^2 + \ldots + \Gamma_q^{p-q}]$$

Dar din teoria combinărilor cu repeţie, avem:

$$1 + \Gamma_q^1 + \Gamma_q^2 + \ldots + \Gamma_q^\alpha = \Gamma_{q+1}^\alpha ,$$

şi atunci rezultă:

$$Q(x) = (-1)^q (x^{p-q} + \Gamma_{q+1}^1 x^{p-q-1} + \Gamma_{q+1}^2 x^{p-q-2} + \ldots + \Gamma_{q+1}^{p-q-1} x + \Gamma_{q+1}^{p-q}) ,$$

care este câtul căutat.

NOTE MATEMATICE

5. — *Particularităţile atmosferei lui Venus.* Intr'un studiu pe care îl presintă în 1931 Academiei de Stiinţe din Prusia, doctorul *Erich Schoenberg,* profesor la Universitatea din Breslau, arată că analiza fotometrică la suprafaţa planetei Venus permite să stabilească că, dacă se ţine seamă de valoarea constantei de refracţie, atmosfera lui Venus, în straturile inferioare, se compune din anhidridă carbonică, lipsind oxigenul şi vaporii de apă. O nouă lucrare, pe care profesorul *Schoenberg* a presentat-o la aceeaş Academie, întăreşte concluziunile sale anterioare printr'o nouă teorie şi prin date mai precise.

Studiul spectrului planetei Venus, făcut în lunile Aprilie şi Maiu 1932 de *W. S. Adams* şi *Th. Dunham,* la observatorul de pe muntele Wilson, a confirmat rezultatele găsite de *St. John* şi *Nicholson* în anul 1922: nici o urmă de vapor de apă sau de oxigen. Din contra, studiul liniilor spectrale în regiunea cuprinsă între 7,820 şi 7,883 angştromi a dat constante în legătură cu caracterele gazului carbonic; cu toate lacunele experimentale, identificarea anhidridei carbonice nu era nesigură.

Două proprietăţi ale gazului intervin aci: indicele de refracţie şi capacitatea de difusiune. Cercetările lui *Cabannes* au stabilit experimental, ceeace decurge din teoria lui *Maxwell,* anume că un gaz mai refringent difuză o mai mare cantitate de lumină şi este astfel mai puţin transparent decât un gaz cu un coeficient de refracţie mai mic. Insă, există un mijloc indiscutabil de a măsura refracţia luminii în atmosfera lui Venus, la suprafaţa planetei: consistă în măsurarea prelungirii vârfului ascuţit al secerii lui Venus în apropriere de conjucţia interioară. In acest fenomen, secera strâmtă a planetei presintă o prelungire dincolo de 180 grade în vecinătatea Soarelui, şi aceasta la fiecare conjucţie, pe când distanţa unghiulară a Soarelui faţă de Venus este inferioară lui 12 grade. Totuşi nu se poate observa acest fenomen adesea, căci agitaţia mare a aerului, în apropriere de Soare, ascunde punctele mici ale secerii. Prima observare s'a efectuat la Dorpat în 1849 de *Mädler,* care a şi dat adevărata explicaţie.

Se înţelege că valoarea prelungirii punctelor ascuţite depinde, groso-modo, de refracţia orizontală la suprafaţa planetei, şi că această refracţie poate fi determinată cu observaţii relative la prelungire. Evaluările efectuate cu datele a trei serii de observaţiuni, prima făcută de *Mädler* în 1849, a doua şi a treia făcute de *Lyman* în 1866 şi în 1871, au dat numere cari se găsesc de acord, având ca valoare medie 54 minute, pecând observaţiunile lui *Rabe,* în 1913, într'o fază mai puţin favorabilă, au dat, pentru refracţia orizontală, 65,6 minute.

Cu toate aceste diferenţe, refracţia orizontală

la suprafaţa lui Venus este mare în raport cu aceea a atmosferei terestre, care este egală cu 36 minute. Puterea refringentă a gazului, la suprafaţa lui Venus, este deci de 1,5 ori mai puţin superioară decât a aerului. Urmărind cercetările asupra distribuţiei luminii în diferite părţi ale spectrului, profesorul *Schoenberg* stabili că puterea difusională a gazului care înveleşte suprafaţa lui Venus, este aproximativ de 2,5 ori mai mare decât aceea a aerului la suprafaţa Pământului. Suprafaţa lui Venus are o temperatură de cel puţin 20 grade mai ridicată decât aceea dela suprafaţa terestră, şi gravitatea nu este decât 0,9 din gravitatea dela suprafaţa Pământului. Aceste două cauze determină pentru gaze o densitate mică la suprafaţa lui Venus. In aceste condiţiuni, calculele făcute de profesorul *Schoenberg* dau, pentru refracţia la suprafaţa lui Venus, o valoare care se acordă cu resultatele observaţiunilor făcute pentru gazul carbonic.

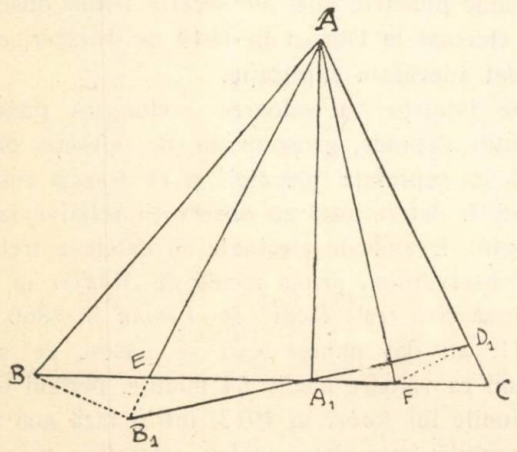
Astfel se degajă cu mai multă tărie concluzia relativă la gazul carbonic. Acest fapt se potriveşte cu alte consecinţe relative la atmosfera lui Venus, consecinţe cari n'au nici o legătură cu articolul acesta, încât nu le voi expune.

GHITESCU SPIRIDON

6. — *Asupra problemei 1018.*

In legătură cu problema 1018, voiu soluţiona următoarea chestiune mai generală:

Fie A B C *un triunghiu oarecare şi* A E, A F



două isogonale. Se proectează vârful B *al triunghiului pe una din isogonale, de exemplu pe* A E *în* B_1*; fie apoi* D_1 *proecţia piciorului* F *al celeilalte isogonale pe* A C, *iar* A_1 *proecţia lui* A *pe* B C.

Punctele A_1, B_1, D_1 *sunt colineare.*

Observăm că punctele A_1, B_1, D_1 se găsesc pe laturile triunghiului A C E.

Ele, după cum se ştie, sunt colineare, dacă, conform reciprocei teoremei lui *Menelau* determină relaţia:

$$(1) \qquad \frac{A_1C}{A_1E}\cdot\frac{B_1E}{B_1A}\cdot\frac{D_1A}{D_1C}=1$$

Pentru a stabili această relaţie considerăm mai întâiu triunghiurile dreptunghice AA_1C şi FD_1C care, fiind asemenea, ne dau:

$$(2) \qquad \frac{A_1C}{D_1C}=\frac{AC}{FC}$$

Apoi triunghiurile dreptunghice BB_1E şi AA_1E fiind şi ele asemenea, avem:

$$(3) \qquad \frac{B_1E}{A_1E}=\frac{BE}{AE}$$

In fine, din asemănarea triunghiurilor AFD_1 şi ABB_1, rezultă:

$$(4) \qquad \frac{D_1A}{B_1A}=\frac{AF}{AB}$$

Inmulţind membru cu membru relaţiile (2), (3), (4) şi grupând convenabil termenii, avem:

$$(5) \qquad \frac{A_1C}{A_1E}\cdot\frac{B_1E}{B_1A}\cdot\frac{D_1A}{D_1C}=\frac{AC}{AB}\cdot\frac{AF}{AE}\cdot\frac{BF}{FC}$$

Dar triunghiurile A B E şi A C F având aceiaşi înălţime şi unghiurile din A egale, putem scri:

$$\frac{ABE}{ACF}=\frac{BE}{FC} \quad \text{şi} \quad \frac{ABE}{ACF}=\frac{AB\cdot AE}{AC\cdot AF}$$

De unde:

$$\frac{BE}{FC}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{AE}{AF}$$

$$\therefore \quad (6) \qquad \frac{AC}{AB}\cdot\frac{AF}{AE}\cdot\frac{BE}{FC}=1$$

Privind relaţiile (5) şi (6) rezultă:

$$\frac{A_1C}{A_1E}\cdot\frac{B_1E}{B_1A}\cdot\frac{D_1A}{D_1C}=1$$

Relaţia (1) fiind stabilită, punctele A_1, B_1, D_1 sunt colineare.

Cazuri particulare.

1. A B C fiind un triunghiu oarecare înscris în cercul O, piciorul A_1, al înălţimei AA_1, proecţia lui A_1 pe A C şi proecţia lui B pe diametru A O, sunt trei puncte colineare.

2. Când una din isogonale este bisectoarea interioară A D a unghiului A, isogonala ei este tot bisectoarea A D şi suntem în cazul problemei 1018.

CEZAR IVANESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXVIII, No. 8, Aprilie 1933. Sur le théorème de *Feuerbach*, par *V. Thébault*. Un vechiu manuscript de aritmetică, de *Petre V. Cazanacli*. Construcţia normalei la cuartica, $x^4 - y^4 = a^4$, de *Al. Şcodranu*. Regulamentul fondului *„Anghel Saligny"*.

2. *Buletinul şedinţelor de la „Societatea Română de Ştiinte*, anul, I, No. 1, Aprilie 1933. Act de naştere, de *V. Vâlcovici*. Dările de seamă ale şedinţelor din 20 Februarie, 6 şi 20 Martie şi 3 Aprilie 1933.

3. *Boletin Matematico*, An V, Febrero 1933, Buenos Aires, publicată de *Dr Bernardo I. Baidaff*.

4. *Revista Matematică a elevilor Craioveni*. Anul II, No. 2, Aprilie 1933. O simplă metodă pentru aflarea cuburilor perfecte, de *Chiriţă Mihail*. Câteva proprietăţi ale problemei 21, de *Predoescu I. M.*

5. *Buletinul „Societăţii de Matematici"* a liceului *„Tasse Dumitrescu"* din Mizil, Anul III, 1932—1933. Avem cuvinte de laudă pentru activitatea elevilor liceului din Mizil strânsi într'o grupare numită, *Societatea Matematică*, sub conducerea distinsului profesor *Spiridon Ghiţescu* şi îi indemnăm să continue şi cu mai mult succes, activitatea începută acum trei ani.

6. *Congresul Internaţional al Matematicienilor*. Zürich 4—12 Septembrie 1932, de Prof. Dr. *Rodolphe Racliş*.

7. *Trabajos del Seminario Matematico*. Director: *J. Rey Pastor*. Facultatea de Ştiinţe exacte, fizice şi naturale, Seria B, No. 12, Buenos Aires 1932. Sur certains mouvements stationnaires plans des liquides visqueux imcompresibles, *A. Rosenblatt*. Representacion de las fuonctiones ciclicas de tercer orden, *José Babini*. Sobre los ceros de las functiones ciclicas, *José Babini*. Sobre el comportamiento de las funciones θ de *Jacobi* de argumento nulo en el contorno del circolo de convergencia, *José Babini*. Teoria de los algoritmos lineales de convergencia y de sumacion, *Julio Rey Pastor*.

8. *Enrique Butty*. Introducción a la Fisica Matematica. Vol. I, 427 pag. Calculo vectorial. Calculo tensorial (para transformaciones liniales ortogonales y complementos de analisis vectorial). Estudio particular del tensor del segundo rango.

9. *V. Vâlcovivci*. Sur le mouvement d'un solide rigide. (Extrait du Bulletin de Mathématique et de Physique pure et appliquées, de l'école Polytechnique „Roi Carol II", Bucarest, III-éme Année 1932—1933 No. 3, fasc. 9.)

10. *V. Vâlcovici*. Un examen de bacalaureat din sesiunea Septembrie 1932. (Extras din „Revista Generală a Învăţământului, No. 1—2, 1933).

11. *Ing. V. Catona şi D. Deheleanu*. Incercări asupra sudării cu arcul electric. (Extras din Buletinul Societăţii Politechnice No. 1, Ianuarie 1933).

PROBLEME REZOLVATE

1124 — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ x^3+y^3+z^3=153 \\ (x+y)(y+z)(z+x)+xyz=207 \end{cases}$$

CEZAR IVANESCU

Inlocuind în ecuaţia 3-a pe $x+y$, $y+z$, $z+x$ respectiv prin $9-z$, $9-x$, $9-y$ deduse din prima ecuaţie, avem:

$$(9-z)(9-x)(9-y)+xyz=207$$

$$^{*}_{**} \quad 729-81(x+y+z)+9(xy+yz+zx)=207,$$

ecuaţie din care deducem cu uşurinţă ţinând seamă de prima ecuaţie a sistemului dat:

$$(1) \qquad xy+yz+zx=23.$$

A 2-a ecuaţie a sistemului dat se mai poate scri:

$$(x+y+z)^3-3xy(x+y)-3yz(y+z)$$
$$-3zx(z+x)-6xyz=153,$$

ecuaţie care se mai poate scri în virtutea primei ecuaţii a sistemului dat:

$$7\,9-3xy(9-z)-3yz(9-x)-3zx(9-y)$$
$$-6xyz=153$$

$$^{*}_{**} \qquad 3xyz-27(xy+yz+zx)=-576$$

Având în vedere însă relaţiunea (1) şi apoi simplificând prin 3, deducem:

$$(2) \qquad xyz=15$$

Rezultă că sistemul dat este echivalent cu următorul:

$$\begin{cases} x+y+z=9 \\ xy+yz+zx=23 \\ xyz=15 \end{cases}$$

Ecuaţiile acestui sistem, ne invederează că cunoastem suma necunoscutelor x, y, z, suma produselor lor luate câte două, precum şi produsul lor.

Ţinând seamă de relaţiile care există intre rădăcinele unei ecuaţii şi coeficienţii ei, rezultă că z, y, z sunt rădăcinele ecuaţiei:

$$(3) \qquad t^3-9t^2+23t-15=0.$$

Primul membru anulându-se pentru $t=1$, $t=3$, $t=5$, rezultă că această ecuaţie (3) are rădăcinele 1, 3, 5. Sistemele de soluţiuni a sistemului dat, sunt:

z	1	1	3	3	5	5
y	3	5	1	5	1	3
z	5	3	5	1	3	1

Soluţii date de d-rele: *Antoniu V. Emilia* (lic. Oltea Doamnă, Iaşi), *Naneş Cornelia* (Şc. Centrală, Bucureşti), şi de d-nii: *Birek Vasile* (Beiuş), *Chiriac C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Chirilă Mihail* (lic. Milit, Craiova), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M.* (lic. Milit Craiova), *Curchi Ioan* (student, Bucureşti), *Dan T. Traian* (Şc. Polit, Timişoara), *Dima A. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Ghiocel V. Vasile* (lic. Giurgiu), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Ionescu Emil* (bacalaureat, Craiova), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit, de Artilerie), *Lupescu Gh. Corneliu* (lic. Roman), *Mazilu Panaite* (lic. Internat, Iaşi), *Mârza C. Vasile* (Şc. Polit., Timişoara), *Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Mehedinţi D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Mereuţă Emilian*, *Milea P. E.* (Sub-Lt.), *Negrea A. Leonte Mircea* (licenţiat în Matematici, Brăila), *Nenciulescu Hariton* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Păunescu N.* (lic. Milit., Craiova), *Petre G. C-tin* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Popa Nicolaie* (lic. Beiuş), *Popescu Adrian* (student), *Predoescu I. M.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Predoescu M. Traian* (lic. Milit., Craiova), *Santto F. Gheorghe* (lic. Internat, Iaşi), *Sandovici Vasile* (lic Internat, Iaşi), *Sâmbotin Gh.* (Sub Lt.), *Segârceanu M. Marin* (lic. Milit, Craiova), *Soare I. Ilie* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Stănescu M. Emil* (lic. Milit., Craiova), *Stefănecu Anibal* (Şc. Polit., Bucureşti), *Stefănescu I. Ion* (Mizil), *Stern M. Nicolaie* (lic. Beiuş) *Stoica Ion* (Sub-Lt.), *Tica Petre Marin* (Sub-Lt.), *Theoharide Lucian* (Şc. Pregăt. de ofiţeri), *Trică S. Ioan* (Caransebeş), *Trifănescu I. Iorgu* (Craiova), şi *Vasiliiu-Leoben Gh.* (Inginer).

1132. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x^5+x^3y^2+x^2y^3+y^5=455 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$$

IOAN CURCHI

Prima ecuaţie se mai poate scri:

$$(x^3+y^3)(x^2+y^2)=455,$$

care în virtutea ecuaţiei a 2-a, devine:

$$x^2+y^2=13$$

Sistemul dat este astfel echivalent cu următorul:

$$(1)\qquad \begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$$

Acest sistem se mai poate scri:

$$(2)\qquad \begin{cases} (x+y)^2-2xy=13 \\ (x+y)(x^2-xy+y^2)=35 \end{cases}$$

Notând:

$$(3)\qquad \begin{cases} x+y=u \\ xy=v \end{cases},$$

sistemul (2) devine:

$$(4)\qquad \begin{cases} u^2-2v=13 \\ u(13-v)=35 \end{cases}$$

Scoţând pe v din prima ecuaţie şi înlocuind în a 2-a, avem:

$$13u-u\cdot\frac{u^2-13}{2}=35,$$

sau:

$$u^3-39u+70=0.$$

Această ecuaţie se mai poate scri:

$$(u-2)(u-5)(u+7)=0,$$

şi are deci rădăcinele 2, 5 şi -7.

Sistemul (4) admite astfel următoarele sisteme de soluţii:

$$\begin{cases} u=2 \\ v=-\frac{9}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} u=5 \\ v=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} u=-7 \\ v=18 \end{cases}$$

În virtutea relaţiilor (3), avem:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=\frac{9}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-7 \\ xy=18 \end{cases}$$

Rezultă că x, y sunt rădăcinele ecuaţiilor de gradul al 2-lea:

$$t^2-2t-\frac{9}{2}=0, \quad t^2-5t+6=0,$$

$$t^2+7t-18=0,$$

care rezolvate, ne dau pentru x, y sistemele de soluţii:

x	$1+\sqrt{\frac{11}{2}}$	2	$7+\sqrt{\frac{-23}{2}}$
y	$1-\sqrt{\frac{11}{2}}$	3	$7-\sqrt{\frac{-23}{2}}$

Mai avem încă trei sisteme de soluţii, permutând valorile lui x, y.

Soluţii date de d-ra: *Antoniu V. Cornelia* (lic. Oltea Doamnă, Iaşi) şi de d-nii: *Cazanacli P.* (Iaşi), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M.* (lic. Milit., Craiova), *Godeanu Ig. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Ivănescu Cezar* (bacalaureat, Bârlad), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Lupescu Gh. Corneliu* (lic. Roman), *Mazilu Panaite* (lic. Internat, Iaşi), *Mârza C. Vasile* (Şc. Polit., Timişoara), *Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Negrea A. Leonte Mircea* (licenţiat în Matematici), *Popa Nicolaie* (lic. Beiuş), *Popescu Adrian* (student), *Predoescu I. Marin* (lic. Buzeşti, Craiova), *Predoescu Traian* (lic. Milit, Craiova), *Racoţeanu I.* (lic. Milit., Craiova), *Sandovici Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Sâmbotin Gh.* (Sub-Lt.), *Stănescu M. Emil* (lic, Milit., Craiova), *Stoica Ioan* (Sub-Lt.), *Trică S. Ioan* (Caransebeş) şi *Vasiliu-Leoben Gh.* (Inginer).

1135. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$9 + 2\sum_{k=1}^{8} k \cos (9 - k)\, x = 0 .$$

V. ALACI

Prima soluţie dată de d-nii: *Cazacli P.* (Iaşi) şi *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova).

Ecuaţia dată se mai poate scri:

$$(1) \qquad 9 + 2\sum_{k=1}^{8}\left(\sum_{k=1}^{k} \cos k\, x\right) = 0 .$$

Cunoaştem însă formula:

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{k} \cos k\, x = \frac{\cos \frac{(k+1)\,x}{2} \sin \frac{k\,x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{(2k+1)\,x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

(Compléments de Trigonométrie par „F. G. M", pag. 45), astfel că ecuaţia (1) devine:

$$9 + \sum_{k=1}^{8} \frac{\sin \frac{(2k+1)\,x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = 0 ,$$

sau:

$$(3) \qquad 1 + \sum_{k=1}^{8} \frac{\sin \frac{(2k+1)\,x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = 0 .$$

Acum, dacă în formula cunoscută:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin [a + (k-1)\,h] = \frac{\sin\left[a + \frac{(n-1)\,h}{2}\right] \sin \frac{n\,h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} ,$$

(Compléments de Trigonométrie par „F. G. M", pag. 43), luăm:

$$a = \frac{3\,x}{2} , \quad h = x , \quad n = 8 ,$$

obţinem:

$$\sum_{k=1}^{8} \sin \frac{(2k+1)\,x}{2} = \frac{\sin 5\,x \, \sin 4\,x}{\sin \frac{x}{2}}$$

In virtutea acestei relaţiuni, ecuaţiunea (3) devine:

$$1 + \frac{\sin 5\,x \, \sin 4\,x}{\sin^2 \frac{x}{2}} = 0 ,$$

sau:

$$1 - \cos x + \cos x - \cos 9\,x = 0 .$$

De aci deducem:

$$\cos 9\,x = 1$$

sau:

$$x = \frac{2k\pi}{9} , \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Soluţia 2-a dată de d-l: *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti).

In articolul *„Sume trigonometrice transformate în produse"* din „R. M. T.", anul VII, No. 9, este stabilită relaţia:

$$2n + 1 + 2[\cos 2n\,x + 2\cos (2n-1)\,x + 3\cos (2n-2)\,x + \ldots + (2n-1)\cos 2\,x + 2n \cos n] = 2^{2n} \prod_{k=1}^{n} \left(\cos x - \cos \frac{2k\pi}{2n+1}\right)^2$$

Dacă luăm $n = 4$, găsim:

$$9 + 2\sum_{k=1}^{8} k \cos (9-k)\,x = 2^8 \prod_{k=1}^{4} \left(\cos x - \cos \frac{2k\pi}{9}\right)^2$$

In virtutea acestei relaţiuni, ecuaţia dată se poate scri:

$$\prod_{k=1}^{4} \left(\cos x - \cos \frac{2k\pi}{9}\right) = 0 ,$$

deci:

$$\cos x = \cos \frac{2k\pi}{9} , \qquad \text{pentru} \quad k = 1, 2, 3, 4$$

sau:

$$x = 2k_1\pi \pm \frac{2k\pi}{9} ,$$

pentru:

$k = 1, 2, 3, 4$; $k_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Soluția 3-a dată de d-nii: *Curchi Ioan* (student, București), *Lățea P. C-tin* (Șc. Milit. de Artilerie) și *Popa B. Ioan* (Șc. Polit., Timișoara).

In problema 1069 generalizată și publicată în „R. M. T." an XII, pag. 82, se stabileste relația:

$$(1 + 2\cos t + 2\cos 2t + \ldots + 2\cos nt)^2 =$$
$$2n + 1 + 2[\cos 2nt + 2\cos(2n-1)t + \ldots$$
$$\ldots (2n-1)\cos 2t + 2n\cos t]$$

Pentru $n = 4$, $t = x$ această relație devine:

$$(1 + 2\cos x + 2\cos 2x + 2\cos 3x + 2\cos 4x)^2 =$$
$$9 + 2\sum_{k=1}^{8} k\cos(9-k)x$$

In virtutea acestei relații, ecuația dată devine

$$1 + 2\cos x + 2\cos 2x + 2\cos 3x + 2\cos 4x = 0,$$

sau:

$$(4) \qquad 1 + 2\sum_{k=1}^{4}\cos kx = 0.$$

Dacă în formula (2) din prima soluție, luăm $k = 4$, obținem:

$$\sum_{k=1}^{4}\cos kx = \frac{\sin\frac{9x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

In virtutea acestei relații ecuația (4) devine:

$$1 + \frac{\sin\frac{9x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} = 0,$$

sau:

$$\sin\frac{9x}{2} = 0,$$

de unde:

$$x = \frac{2k\pi}{9}, \quad \text{pentru} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

PROBLEME PROPUSE

1193. — Trouver les quatre chiffres significatifs avec lesquels on peut former deux nombres N_1, N_2, tels que N_1 soit premier, N_2 un cube et $N_1 - 1$ un carré parfait. V. THÉBAULT

1194. — Un număr are ca divizor un număr prim de două cifre, iar patratul lui se termină cu patratul de trei cifre a numărului prim de două cifre.

Care sunt soluțiile problemei?

I. V. MATIES

1195. — In triunghiul A B C, fie H ortocentrul, G centrul de greutate, D, E, F picioarele înălțimelor care pleacă respectiv din A, B, C. Perechile de cercuri: (B H C, E H F), (C H A , F H D), (A H B , D H E) se taie a doua oară, respectiv în M, N, P.

Să se arate că punctele M, N, P, H, G, sunt situate pe un cerc. CEZAR COSNITA

1196. — Se consideră un patrat A B C D, cu latura a. Se duce diagonala A C. O paralelă la latura B C întâlnește dreptele A B, A C, C D respectiv în L, M, N.

1°. Să se determine poziția acestei paralele, astfel ca rotind patratul în jurul laturei C D, volumul născut prin rotirea triunghiului A L M să fie egal cu volumul născut prin rotirea triunghiului M N C.

2°. Aceiași problemă, când se înlocuește diagonala A C cu sfertul de cerc, cuprins în patrat, cu centrul în D și de rază a. N. BOTEA

1197. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} (x+3y)^3 + (x-3y)^3 = 124 \\ 3y^3 + x^2 y = 7 \end{cases}$$

IOAN CURCHI

1198. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} ax^4 + by^4 + axy^3 + byx^3 = m \\ ax^2 + by^2 + (a+b)xy = n \end{cases}$$

ION MARGINEANU

1199. — Să se stabilească identitatea:

$$\frac{3\sin t - 3\sin 5t + 3\sin 7t - \sin 9t}{1 + 2\cos 6t} = 4\sin^3 t$$

V. ALACI

1200. — Notațiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se stabilească relația:

$$\sum \frac{r_a}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}} = \sum a\left(\cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\right)$$

MIRCEA D MOTOC

INFORMAȚIUNI

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**

Administration :
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

LA REDACȚIA „REVISTEI MATEMATICE DIN TIMIȘOARA SE PRIMESC ABONAMENTE PENTRU ANUL AL V-LEA (MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)

DE BOLETIN MATEMATICO

COSTUL UNUI ABONAMENT FIIND DE 300 LEI ȘI PENTRU ANUL AL III-LEA (MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)

DE BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

COSTUL ABONAMENTULUI FIIND DE 125 LEI, PUBLICATE ÎN BUENOS AIRES; AMÂNDOUĂ 400 LEI

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

PREMIUL TRAIAN LALESCU în valoare de 10.000 (zece mii) lei, oferit de *Revista Universitară Matematică* de sub conducerea d. Prof. Dr. *Rodolphe Racliș*, celor mai distinși Licențiați în Științe Matematice sau Ingineri Diplomați, a fost decernat pentru anul 1932, d-lui *Cezar Coșniță*, Licențiat în Științe Matematice de la Facultatea de Științe din București

Pentru anul 1931 premiul n'a fost decernat, în schimb suma corespunzătoare de 10.000 (zece mii) lei a fost oferită tot d lui *Cezar Coșniță*, ajutor de cărți.

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Abonamentul pe anul XIII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă **100 (UNA SUTA) LEI** și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU, Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL XIII. 15 IUNIE 1933 NO. 4.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. M V. THÉBAULT SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE.
2. N. G. BOTEA TEOREME IN LEGATURA CU DOUA TRIUNGHIURI SAU DOUA POLIGOANE.
3. NOTE MATEMATICE: 7. 8.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1033 1083, 1121, 1122.
6. PROBLEME PROPUSE: 1201-1208.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Artegrafice „Tipografia Românească"

Avem plăcerea a anunța că începând dela 15 Aprilie 1933, mai face parte dintre membrii „Revistei Matematice din Timișoara“ și *D-l Nicolae G. Botea,* licențiat în Matematici, Calea Floreasca 46, București 3.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu,** Școala Politechnică din Timișoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timișoara“ este pentru anul XIII, de 200 (două sute) lei

---

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XII inclusiv, broșate, 120 lei fiecare

---

ANUL XIII — No 4 TIMISOARA, 15 IUNIE 1933

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMĂR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie.

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE

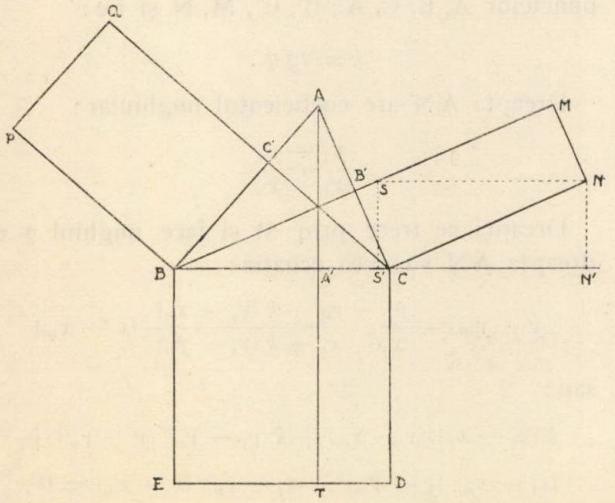
par M V THÉBAULT, le Mans (France).

1. Dans le *Journal de Vuibert,* 1903 p. 9, nous avons énoncé ce corollaire d'un théorème classique :

Dans un triangle, le carré d'un côté quelconque égale la différence ou la somme des produits de chacun des deux autres côtés par la projections du premier sur chacun d'eux, suivant que le côté considéré est ou n'est pas adjacent à un angle obtus.

Voici, pour les jeunes lecteurs, une autre vérification de cette proposition, basée sur une remarque très simple.

2. Soient un triangle *acutangle* ABC; AA′, BB′, CC′, ses hauteurs; BCDE le carré, construit extérieurement sur BC, T l'intersection de



AA′ avec DE. CB′MN et BPQC′ les rectangles découpés dans les carrés extérieurs à AC et BA par les hauteurs BB′ et CC′.

Si l'on projette orthogonalement le sommet N du rectangle CB′MN en N′ sur BC, *les triangles rectangles* CNN′ *et* ACA′ *sont égaux, et* NN′ = A′C.

La parallèle NS à BC rencontre BM en S, déterminant un triangle rectangle SMN équipollent à BB′C et un parallélogramme BSNC′ équivalent aux deux rectangles B′MNC et SNN′S′.

Mais les rectangles SNN′S′ et A′CDT sont égaux, d'où l'on déduit que :

$$AC \cdot B'C = B'MNC = A'CDT.$$

Par analogie :

$$AB \cdot AC' = BPQC' = BA'TE,$$

et, finalement :

$$BCDE = BPQC' + B'MNC,$$

soit :

$$\overline{BC}^2 = BA \cdot BC' + AC \cdot B'C.$$

3. L'égalité des segments A′C et NN′ subsiste dans un triangle *rectangle* en A, et le théorème de *Pythagore* en découle par un raisonnement analogue à celui qui précède.

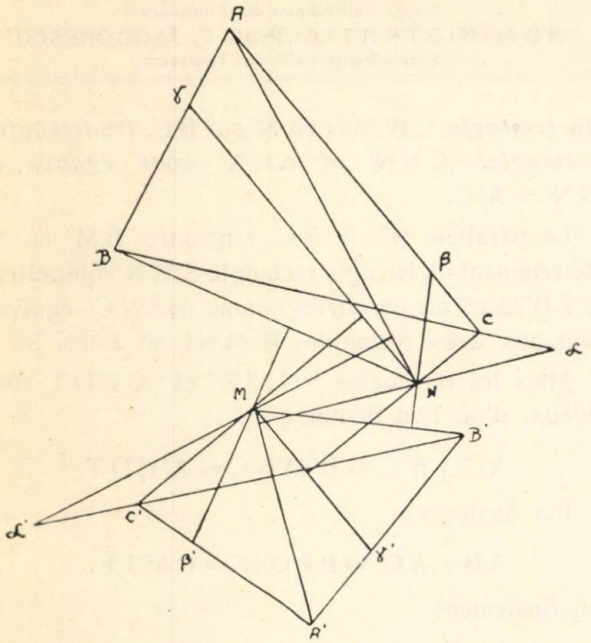
TEOREME IN LEGĂTURĂ CU DOUĂ TRIUNGHIURI SAU DOUĂ POLIGOANE

de N. G BOTEA

1°. **Teoremă.** *Fie două triunghiuri ABC, A′B′C′ și două puncte M și N în același plan. Dreptele ce trec prin punctul M și fac în același sens un același unghiu φ cu dreptele NA, NB, NC întâlnesc laturile B′C′, C′A′, A′B′ în punctele α′, β′, γ′, iar dreptele ce trec prin punctul N și fac în același sens un unghiu egal cu* $(\pi - \varphi)$

cu dreptele MA', MB', MC' întâlnesc laturile BC, CA, AB în punctele α, β, γ. Avem relaţia:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\alpha' B'}}{\overline{\alpha' C'}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{B' C'}}{\overline{\beta' A'}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} \cdot \frac{\overline{\gamma' A'}}{\overline{\gamma' B'}} = 1 .$$



Pentru demonstraţie să considerăm triunghiurile $B'M\alpha'$ şi $\alpha' M C'$. Vom avea relaţia:

$$\frac{\overline{\alpha' B'}}{\overline{\alpha' C'}} = \frac{\overline{M B'} \sin (\alpha' M B')}{\overline{M C'} \sin (\alpha' M C')}$$

Analog găsim:

$$\frac{\overline{\beta' C'}}{\overline{\beta' A'}} = \frac{\overline{M C'} \sin (\beta' M C')}{\overline{M A'} \sin (\beta' M A')} ,$$

$$\frac{\overline{\gamma' A'}}{\overline{\gamma' B'}} = \frac{\overline{M A'} \sin (\gamma' M A')}{\overline{M B'} \sin (\gamma' M B')}$$

şi înmulţind parte cu parte aceste relaţii, deducem:

$$\frac{\overline{\alpha' B'}}{\overline{\alpha' C'}} \cdot \frac{\overline{\beta' C'}}{\overline{\beta' A'}} \cdot \frac{\overline{\gamma' A'}}{\overline{\gamma' B'}} =$$

$$\frac{\sin (\alpha' M B')}{\sin (\alpha' M C')} \cdot \frac{\sin (\beta' M C')}{\sin (\beta' M A')} \cdot \frac{\sin (\gamma' M A')}{\sin (\gamma' M B')} .$$

Dacă schimbăm triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ între ele, punctele M şi N între ele şi înlocuim unghiul φ cu unghiul $(\pi - \varphi)$, obţinem relaţia:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} =$$

$$\frac{\sin (\alpha N B)}{\sin (\alpha N C)} \cdot \frac{\sin (\beta N C)}{\sin (\beta N A)} \cdot \frac{\sin (\gamma N A)}{\sin (\gamma N B)} .$$

Se observă pe figură că avem egalităţile de unghiuri:

$$\sphericalangle \alpha' M B' = \sphericalangle \beta N A \quad , \quad \sphericalangle \alpha' M C' = \sphericalangle \gamma N A .$$

şi alte patru analoage, şi se verifică imediat relaţia:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\alpha' B'}}{\overline{\alpha' C'}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\beta' C'}}{\overline{\beta' A'}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} \cdot \frac{\overline{\gamma' A'}}{\overline{\gamma' B'}} = 1 .$$

In particular dacă punctele α, β, γ sunt în linie dreaptă, teorema lui *Menelaus* ne arată că şi punctele α', β', γ' sunt în linie dreaptă.

Deasemenea dacă dreptele $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sunt concurente, din teorema lui *Ceva* deducem că şi dreptele $A'\alpha'$, $B'\beta'$, $C'\gamma'$ sunt concurente.

2°. Propoziţiunea se mai poate demonstra şi prin calcul. Soluţia nu este lipsită de eleganţă şi simetrie. Credem interesant s'o schiţăm.

Să raportăm figura la un sistem de două axe carteziene perpendiculare Ox şi Oy.

Fie (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), (x'_3, y'_3), (x_m, y_m), (x_n, y_n) respectiv coordonatele punctelor A, B, C, A', B', C', M, N şi fie:

$$k = tg\, \varphi .$$

Dreapta AN are coeficientul unghiular:

$$\frac{y_1 - y_n}{x_1 - x_n} .$$

Dreapta ce trece prin M şi face unghiul φ cu dreapta AN va avea ecuaţia:

$$y - y_m = \frac{y_1 - y_n - k(x_1 - x_n)}{x_1 - x_n + k(y_1 - y_n)} (x - x_m)$$

sau:

$$k(x_1 - x_n)(x - x_m) + k(y_1 - y_n)(y - y_m) +$$
$$(x_1 - x_n)(y - y_m) - (y_1 - y_n)(x - x_m) = 0 .$$

Dacă în general avem o dreaptă D de ecuaţie:

$$Ax + By + C = 0$$

şi două puncte $P(x_p, y_p)$, $Q(x_q, y_q)$, dreapta D întâlneşte segmentul PQ în punctul R, astfel ca:

$$\frac{\overline{RP}}{\overline{RQ}} = \frac{Ax_p + By_p + C}{Ax_q + By_q + C}$$

Din cele arătate deducem:

$$\frac{\overline{\alpha' B'}}{\overline{\alpha' C'}} = \frac{d(m, 1, n, 2', k)}{d(m, 1, n, 3', k)}$$

unde s'a notat:

$$d(m, i, n, j', k) = k[(x_i - x_n)(x'_j - x_m) + (y_i - y_n)(y'_j - y_m)] + (x_i - x_n)(y'_j - y_m) - (y_i - y_n)(x'_j - x_m).$$

Analog se găsesc relaţiile:

$$\frac{\overline{\beta' C'}}{\overline{\beta' A'}} = \frac{d(m, 2, n, 3', k)}{d(m, 2, n, 1', k)}; \quad \frac{\overline{\gamma' A'}}{\overline{\gamma' B'}} = \frac{d(m, 3, n, 1', k)}{d(m, 3, n, 2', k)};$$

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{d(n, 1', m, 2, -k)}{d(n, 1', m, 3, -k)}; \quad \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} = \frac{d(n, 2', m, 3, -k)}{d(n, 2', m, 1, -k)};$$

$$\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = \frac{d(n, 3', m, 1, -k)}{d(n, 3', m, 2, -k)}$$

şi observând că:

$$d(m, i, n, j', k) = -d(n, j', m, i, -k)$$

se deduce relaţia:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\alpha' B'}}{\overline{\alpha' C'}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\beta' C'}}{\overline{\beta' A'}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} \cdot \frac{\overline{\gamma' A'}}{\overline{\gamma' B'}} = 1.$$

3°. Mai general putem enunţa propoziţia:

Fie $A_1 A_2 \ldots A_n$, $B_1 B_2 \ldots B_n$ două poligoane coplanare şi M, N două puncte în planul lor. Dreptele duse prin M şi înclinate de unghiu φ pe dreptele $A_i N$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ întâlnesc laturile $B_i B_{i+1}$ (Se convine să se înlocuiască A_{n+1}, B_{n+1} prin A_1, B_1) respectiv în punctele β_i, iar dreptele duse prin N şi înclinate de unghiu $(\pi - \varphi)$ pe dreptele $B_i M$ întâlnesc laturile $A_i A_{i+1}$ în punctele α_i. Avem relaţia:

$$\prod_{i=1}^{i=n} \frac{\overline{\alpha_i A_i}}{\overline{\alpha_i A_{i+1}}} \cdot \frac{\overline{\beta_i B_i}}{\overline{\beta_i B_{i+1}}} = 1.$$

Demonstraţia se face în acelaş chip ca pentru triunghiu.

4°. In particular dacă M se confundă cu N se obţine următoarea proprietate enunţată de D-l *N. Mihăileanu* cu prilejul rezolvării problemei 4164 din G. M.:

Fie în plan două poligoane de acelaş număr de laturi T, T' şi M un punct în planul lor. Fascicolul de drepte cu vârful în M şi făcând cu dreptele ce unesc pe M cu vârfurile lui T unghiuri egale cu φ, împarte laturile corespunzătoare ale poligonului T' în rapoarte ale căror produs luat în acelaş sens este egal cu inversul rapoartelor ce le determină pe laturile poligonului T fascicolul cu vârful în M, ale cărui raze fac unghiul $(\pi - \varphi)$ cu dreptele ce unesc pe M cu vârfurile lui T'.

5°. In cazul a două triunghiuri ABC, A'B'C', dacă punctele M, N sunt confundate şi $\varphi = 0$ sau $\varphi = \frac{\pi}{2}$ se obţine problema noastră Nr. 4164 din Gazeta Matematică, cu enunţul următor.

Se consideră în acelaş plan două triunghiuri ABC, A'B'C şi un punct M.

a) Dacă dreptele AM, BM, CM întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului A'B'C' în trei puncte colineare, sau în picioarele a trei ceviene concurente, atunci şi dreptele A'M, B'M, C'M întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului ABC în trei puncte colineare sau în picioarele a trei ceviene concurente.

b) Dacă perpendicularele coborâte din M pe AM, BM, CM întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului A'B'C' în trei puncte colineare sau în picioarele a trei ceviene concurente, atunci şi perpendicularele coborâte din M pe A'M, B'M, C'M întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului ABC în trei puncte colineare sau în picioarele a trei ceviene concurente.

6°. Dacă triunghiurile ABC, A'B'C' se confundă, avem teorema:

Se consideră un triunghiu ABC şi două puncte M şi N în planul său. Dreptele duse prin M şi înclinate de unghiul φ pe cevienele AN, BN, CN întâlnesc laturile BC, CA, AB respectiv în A', B', C', iar dreptele duse prin N şi înclinate de unghiul $(\pi - \varphi)$ pe cevienele AM, BM, CM întâlnesc laturile BC, CA, AB respectiv în punctele A'', B'', C''. Punctele A', A'', B', B'', C', C'' se găsesc pe o conică Γ.

Am demonstrat relația:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\cdot\frac{\overline{A''B}}{\overline{A''C}}\cdot\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{B''C}}{\overline{B''A}}\cdot\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}\cdot\frac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}}=1$$

și după o teoremă a lui *Carnot*, această relație reprezintă condiția ca punctele A', A'', B', B'', C', C'' să se găsească pe o conică Γ.

In particular dacă $\varphi=0$ avem proprietatea:

Se consideră două puncte M și N în planul triunghiului A B C. Paralelele duse prin M la cevienele punctului N întâlnesc respectiv laturile B C, C A, A B în punctele A', B', C', iar paralelele duse prin N la cevienele punctului M întâlnesc respectiv laturile B C, C A, A B în punctele A'', B'', C''. Punctele A', A'', B', B'', C', C'' se găsesc pe o conică Γ. (N. Botea. Curierul Matematic, II. 1926 p. 168.)

Dacă $\varphi=\frac{\pi}{2}$ avem propoziția:

Se consideră două puncte M și N în planul triunghiului A B C. Perpendicularele coborâte din M pe cevienele lui N și perpendicularele coborâte din N pe cevienele lui M întâlnesc laturile B C, C A, A B în punctele A', A'', B', B'', C', C'', care se găsesc pe o conică Γ. (N. Botea. Curierul Matematic, II. 1927, p. 193.)

7°. Dacă și punctele M și N sunt confundate avem proprietatea:

Se consideră un punct M în planul unui triunghiu A B C. Dreptele duse prin M, înclinate de același unghiu φ pe cevienele A M, B M, C M întâlnesc laturile B C, C A, A B respectiv în punctele A', B', C'. Simetricele dreptelor M A', M B', M C', respectiv în raport cu cevienele A M, B M, C M, întâlnesc dreptele B C, C A, A B în punctele A'', B'', C''. Punctele A', A'', B', B'', C', C'' se găsesc pe o conică.

Dacă $\varphi=\frac{\pi}{2}$ avem proprietatea cunoscută:

Perpendicularele coborâte dintr'un punct M pe cevienele sale A M, B M, C M, întâlnesc laturile triunghiului A B C în punctele A', B', C' colineare.

8°. Iată o propoziție analoagă pentru spațiu:

Să considerăm două triunghiuri A B C, A' B' C' și două drepte oarecare D_1, D_2 în spațiu. Planele duse prin D_2 perpendiculare pe planele (D_1, A), (D_1, B), (D_1, C) întâlnesc respectiv laturile B' C', C' A', A' B' în punctele α', β', γ', iar planele duse prin D_1 perpendiculare pe planele (D_2, A'), (D_2, B'), (D_2, C') întâlnesc laturile B C, C A, A B respectiv în α, β, γ. Avem relația:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\alpha' B'}}{\overline{\alpha' B'}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\beta' C'}}{\overline{\beta' A'}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}\cdot\frac{\overline{\gamma' A'}}{\overline{\gamma' B'}}=1\,.$$

Să raportăm figura la un sistem de trei axe perpendiculare, luând ca axă O Z perpendiculara comună celor două drepte. Să considerăm punctele:

$$A(x_1, y_1, z_1)\ ;\ B(x_2, y_2, z_2)\ ;\ C(x_3, y_3, z_3);$$

$$A'(x'_1, y'_1, z'_1)\ ;\ B(x'_2, y'_2, z'_2)\ ;\ C(x'_3, y'_3, z'_3).$$

și dreptele:

$$D_1\begin{cases} z=a_1\,. \\ y=b_1 x\,. \end{cases}\qquad D_2\begin{cases} z=a_2\,. \\ y=b_2 x\,. \end{cases}$$

Un plan trecând prin dreapta D_1 are ecuația:

$$(1)\qquad z-a_1+\lambda(y-b_1 x)=0\,.$$

Punând condiția ca acest plan să treacă prin punctul $A(x_1, y_1, z_1)$, obținem ecuația:

$$(y_1-b_1 x)(z-a_1)-(z_1-a_1)(y-b_1 x)=0\,.$$

sau:

$$(2)\qquad (a_1-z_1)b_1 x+(a_1-z_1)y+$$
$$(y_1-b_1 x_1)z-a_1(y_1-b_1 x_1)=0\,.$$

Ecuația unui plan, trecând prin dreapta D_2 are ecuația:

$$(3)\qquad z-a_2+\mu(y-b_2 x)=0$$

sau:

$$(4)\qquad \mu b_2 x-\mu y-z+a_2=0\,.$$

Scriind că planele (2) și (4) sunt perpendiculare, vom avea condiția:

$$\mu(a_1-z_1)b_1 b_2-\mu(a_1-z_1)-(y_1-b_1 x_1)=0$$

din care scoatem:

$$\mu=\frac{y_1-b_1 x_1}{(a_1-z_1)(b_1 b_2-1)}$$

și ecuația (3) devine:

$$(5)\qquad (z_1-a_1)(z-a_2)(b_1 b_2-1)-$$
$$(y_1-b_1 x_1)(y-b_2 x)=0\,.$$

Deducem de aci:

$$\frac{\overline{\alpha' B'}}{\overline{\alpha' C'}} = \frac{\Omega(D_1, 1, 2')}{\Omega(D_1, 1, 3')}$$

unde am notat:

$$\Omega(D_1, i, j') = (z_i - a_1)(z'_j - a_2)(b_1 b_2 - 1) - (y_i - b_1 x_i)(y'_j - b_2 x'_j)$$

Analog găsim:

$$\frac{\overline{\beta' B'}}{\overline{\beta' A'}} = \frac{\Omega(D_1, 2, 3')}{\Omega(D_1, 2, 1')} \quad ; \quad \frac{\overline{\gamma' A'}}{\overline{\gamma' B'}} = \frac{\Omega(D_1, 3, 1')}{\Omega(D_1, 3, 2')} \quad ;$$

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{\Omega(D_2, 1', 2)}{\Omega(D_2, 1', 3)} \quad ; \quad \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} = \frac{\Omega(D_2, 2', 3)}{\Omega(D_2, 2', 1)} \quad ;$$

$$\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = \frac{\Omega(D_2, 3', 1)}{\Omega(D_2, 3', 2)}$$

și ținând seama de relațiile:

$$\Omega(D_1, i, j') = \Omega(D_2, j', i)$$

deducem:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\alpha' B'}}{\overline{\alpha' C'}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\beta' C'}}{\overline{\beta' A'}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} \cdot \frac{\overline{\gamma' A'}}{\overline{\gamma' B'}} = 1 .$$

Dacă punctele α, β, γ sunt în linie dreaptă și punctele α', β', γ' sunt în linie dreaptă.

Dacă dreptele $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sunt concurente, și $A'\alpha'$, $B'\beta'$, $C'\gamma'$ vor fi concurente.

9°. Tot în spațiu vom mai avea proprietatea:

Fie două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ și două puncte oarecare M, N. Planele duse prin M, perpendiculare pe dreptele AN, BN, CN întâlnesc laturile $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ în α', β', γ', iar planele duse prin N, perpendiculare pe dreptele $A'M$, $B'M$, $C'M$ întâlnesc laturile BC, CA, AB în α, β, γ. Avem relația:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\alpha' B'}}{\overline{\alpha' C'}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\beta' C'}}{\overline{\beta' A'}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} \cdot \frac{\overline{\gamma' A'}}{\overline{\gamma' C'}} = 1 .$$

Păstrând notațiile paragrafului precedent, să mai considerăm punctele:

$$M(x_m, y_m, z_m) \quad , \quad N(x_n, y_n, z_n) .$$

Dreapta AN are parametrii directori:

$$x_1 - x_n, \quad y_1 - y_n, \quad z_1 - z_n .$$

și deci planul dus prin M, perpendicular pe dreapta AN va avea ecuația:

$$(x_1 - x_n)(x - x_m) + (y_1 - y_n)(y - y_m) + (z_1 - z_n)(z - z_m) = 0 .$$

Deducem de aci:

$$\frac{\overline{\alpha' B'}}{\overline{\alpha' C'}} = \frac{\omega(n, 1, m, 2')}{\omega(n, 1, m, 3')}$$

unde s'a notat:

$$\omega(n, i, m, j') = (x_i - x_n)(x'_j - x_m) + (y_i - y_n)(y'_j - y_m) + (z_i - z_n)(z'_j - z_m)$$

și analog obținem relațiile:

$$\frac{\overline{\beta' C'}}{\overline{\beta' A'}} = \frac{\omega(n, 2, m, 3')}{\omega(n, 2, m, 1')} \quad ; \quad \frac{\overline{\gamma' A'}}{\overline{\gamma' B'}} = \frac{\omega(n, 3, m, 1')}{\omega(n, 3, m, 2')} \quad ;$$

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = \frac{\omega(m, 1', n, 2)}{\omega(m, 1', n, 3)} \quad ; \quad \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} = \frac{\omega(m, 2', n, 3)}{\omega(m, 2', n, 1)} \quad ;$$

$$\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = \frac{\omega(m, 3', n, 1)}{\omega(m, 3', n, 2)}$$

Din aceste relații și din relațiile:

$$\omega(n, i, m, j') = \omega(m, j', n, i)$$

deducem relația căutată:

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\alpha' B'}}{\overline{\alpha' C'}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\beta' C'}}{\overline{\beta' A'}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} \cdot \frac{\overline{\gamma' A'}}{\overline{\gamma' B'}} = 1 .$$

Dacă punctele M și N se confundă obținem următoarea proprietate găsită de D-l *C. Coșniță* cu prilejul rezolvării problemei 4164 din G. M.:

Să considerăm două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ oarecare și un punct M. Dacă planele ridicate în M perpendicular pe AM, BM, CM tae laturile corespunzătoare ale triunghiului $A'B'C'$ în trei puncte colineare sau în picioarele a trei ceviene concurente, atunci și planele ridicate în M, perpendicular pe $A'M$, $B'M$, $C'M$ întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului ABC în trei puncte colineare, sau în picioarele a trei ceviene concurente.

10°. Insfârșit demonstrațiile făcute se pot aplica pentru demonstrarea propozițiilor mai generale următoare:

a) Fie $A_1 A_2 \ldots A_n$, $B_1 B_2 \ldots B_n$ *două poligoane strâmbe de acelaş număr de laturi şi* D_1, D_2 *două drepte oarecare în spaţiu. Planele* (A_i, D_1) $(i = 1, 2, \ldots n)$ *întâlnesc în* β_i *respectiv laturile* $B_i B_{i+1}$ *(Se convine să se înlocuiască* B_{n+1} *prin* B_1*) iar planele* (B_i, D_2) *întâlnesc respectiv în* α_i *laturile* $A_i A_{i+1}$. *Avem relaţia:*

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\overline{\alpha_i A_i}}{\alpha_i A_{i+1}} \cdot \frac{\overline{\beta_i B_i}}{\beta_i B_{i+1}} = 1 .$$

b) Fie $A_1 A_2 \ldots A_n$, $B_1 B_2 \ldots B_n$ *două poligoane strâmbe de acelaş număr de laturi şi M, N două puncte oarecare în spaţiu. Planele duse prin M perpendiculare pe dreptele* $N A_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ *întâlnesc în* β_i *respectiv laturile* $B_i B_{i+1}$ *(Se convine să se înlocuiască* B_{n+1} *prin* B_1*), iar planele duse prin N perpendiculare pe dreptele* $M B_i$ *întâlnesc în* α_i *respectiv laturile* $A_i A_{i+1}$. *(Se convine să se înlocuiască* A_{n+1} *prin* A_1*). Avem relaţia:*

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\overline{\alpha_i A_i}}{\alpha_i A_{i+1}} \cdot \frac{\overline{\beta_i B_i}}{\beta_i B_{i+1}} = 1 .$$

In particular în cazul patrulaterului strâmb avem proprietăţile:

c) Fie $A B C D$, $A' B' C' D'$ *două patrulatere strâmbe şi* Δ_1, Δ_2 *două drepte oarecare în spaţiu. Planele* (A, Δ_1), (B, Δ_1), (C, Δ_1), (D, Δ_1) *întâlnesc laturile* $A' B'$, $B' C'$, $C' D'$, $D' A'$ *respectiv în a, b, c, d, iar planele* (A', Δ_2), (B', Δ_2), (C', Δ_2), (D', Δ_2) *întâlnesc laturile* $A B$, $B C$, $C D$, $D A$ *respectiv în* a', b', c', d'. *Dacă punctele a, b, c, d sunt în acelaş plan şi punctele* a', b', c', d' *se găsesc într'un plan.*

d) Fie $A B C D$, $A' B' C' D'$ *două patrulatere strâmbe şi M, N două puncte oarecare în spaţiu. Planele duse prin M perpendiculare pe dreptele* $N A$, $N B$, $N C$, $N D$ *întâlnesc în* a', b', c', d' *respectiv laturile* $A' B'$, $B' C'$, $C' D'$, $D' A'$, *iar planele duse prin N perpendiculare pe dreptele* $M A'$, $M B'$, $M C'$, $M D'$, *întâlnesc respectiv în a, b, c, d laturile* $A B$, $B C$, $C D$, $D A$. *Dacă punctele a, b, c, d sunt coplanare, şi punctele* a', b', c', d' *sunt coplanare.*

In adevăr se ştie că relaţia:

$$\frac{\overline{a\,A}}{\overline{a\,B}} \cdot \frac{\overline{b\,B}}{\overline{b\,C}} \cdot \frac{\overline{c\,C}}{\overline{c\,D}} \cdot \frac{\overline{d\,D}}{\overline{d\,A}} = 1 .$$

reprezintă condiţia necesară şi suficientă ca punctele *a, b, c, d* să fie coplanare, şi după cele demonstrate, această relaţie atrage după sine relaţia:

$$\frac{\overline{a'\,A'}}{\overline{a'\,B'}} \cdot \frac{\overline{b'\,B'}}{\overline{b'\,C'}} \cdot \frac{\overline{c'\,C'}}{\overline{c'\,D'}} \cdot \frac{\overline{d'\,D'}}{\overline{d'\,A'}} = 1 .$$

Asupra unor generalizări mai largi ale proprietăţilor demonstrate vom reveni mai târziu.

NOTE MATEMATICE

7. — *Generalizarea problemei 1048.*

Voi soluţiona problema 1048, rezolvată în *R.M. T. vol. XII, pag. 35*, mai general, dându-i şi o soluţie cu un caracter mai aritmetic, evitând rezolvarea sistemului de ecuaţii:

$$a + b = \text{Mult } 9 - 1$$

$$a - b = \text{Mult } 11 + 1 .$$

Problema generală ce mi-o propun, este:

Să se găsească patratele perfecte terminate cu 2 z 5 şi divizibile cu 3 şi 11.

Fie N patratele căutate. Intru cât cifra miilor şi a unităţilor fiind respectiv *2* şi *5* cea a zecilor nu poate fi decât *2* şi în concluzie patratele terminate cu *225* sunt de forma:

$$N = (50\,n \pm 15)^2 ,$$

conform celor stabilite de subsemnatul în *Gazeta Matematică, Vol. XXXVII, pag. 366, ş. u.* în articolul *„Asupra ultimului grup de p cifre a patratelor perfecte“*.

Pun condiţia ca $\sqrt{N}$ să fie divizibil cu *3* şi cu *11* şi obţin succesiv:

$$\frac{\sqrt{N}}{3} = 50\,\frac{n}{3} \pm 5 \qquad \therefore \qquad n = 3\,m$$

iar:

$$\sqrt{N} = 15\,(10\,m \pm 1)$$

şi punând condiţia ca să se împarte şi cu *11*, obţin:

$$\frac{\sqrt{N}}{11} = 15\,\frac{10\,m \pm 1}{11} \qquad \therefore \qquad 10\,m \pm 1 = 11\,m' ;$$

de unde:

$$m = \frac{11\,m' \mp 1}{10}$$

$\therefore\ 10\,m' \mp 1 = 10\,m''\quad \therefore\ m' = 10\,m'' \pm 1$,

aşa că:

$$10\,m \pm 1 = 11\,(10\,m'' \pm 1)$$

şi deci:

$\sqrt{N} = 15 \cdot 11\ (10\,m'' \pm 1)$ şi $m'' = 0, 1, \ldots$

formază soluţia generală a problemei.

In cazul particular:

$N^6 \leqq N < 9999999\quad \therefore\quad 10^3 \leqq \sqrt{N} \leqq 3162$,

găsesc că:

$$m'' = 1\,;\,2$$

şi deci:

$$\sqrt{N} = 1485\ ,\ 1815 \text{ şi } 3135\ ,$$

iar:

$$N = 2205225\ ,\ 3294225 \text{ şi } 9828225$$

în număr de trei, patrate de 7 cifre.

Dintre acestea numai $3135^2 = 9828225$ formează soluţia problemei 1048.

I V MATIES

8. — *Asupra problemei 1086. (R. M. T. Vol. XII, pag. 95.)*

In soluţionarea acestei probleme s'a considerat expresia primului membru al egalităţii şi s'a transformat succesiv pentru a obţine membrul al 2-lea.

La un moment dat s'a simplificat cu cos $(x - \varphi)$, ceia ce a introdus condiţia:

$$x \neq \varphi + k\frac{\pi}{2} \qquad (k \text{ intreg})\,;$$

încât egalitatea a fost stabilită numai pentru valorile lui x diferite de $\varphi + k\frac{\pi}{2}$.

„Vom complecta soluţia, dovedind că pentru

$$x = \varphi + k\frac{\pi}{2}$$

limita primului membru al egalităţii propuse este egală cu membrul al 2-lea când $k = 2p + 1$ şi nu este egală, când $k = 2p$".

Considerăm expresia primului membru al egalităţii:

$$E = \frac{(a^2 + b^2)\sin 2x + 2ab}{(a^2 - b^2)\sin 2x - 2ab\cos 2x}$$

Introducând:

$$x = \varphi + k\frac{\pi}{2}\,,$$

evident după cele observate precedent, obţinem nedeterminarea $\frac{0}{0}$. Şi cu metoda lui *L'Hôpital* avem:

$$\lim_{x=\varphi+k\frac{\pi}{2}} E = \lim_{x=\varphi+k\frac{\pi}{2}} \frac{(a^2+b^2)\cos 2x}{(a^2-b^2)\cos 2x + 2ab\sin 2x} =$$

$$\lim_{x=\varphi+k\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos 2\varphi + \sin 2\varphi\,\mathrm{tg}\,2x} =$$

$$\frac{1}{\cos 2\varphi + \sin 2\varphi\,\mathrm{tg}\,2\varphi} = \cos 2\varphi\,.$$

Deci:

$$\lim_{x=\varphi+k\frac{\pi}{2}} E = \cos 2\varphi\,.$$

Membrul al 2-lea al egalităţii propuse notându-l E_1, pentru $x = \varphi + k\frac{\pi}{2}$, devine:

$$E_1 = \frac{\sin\left(2\varphi + k\frac{\pi}{2}\right)}{\sin k\frac{\pi}{2}}\,.$$

Când $k = 4m + 1$.

$$E_1 = \frac{\sin\left(2\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\frac{\pi}{2}} = \cos(-2\varphi) = \cos 2\varphi\,.$$

Când $k = 4m + 3$.

$$E_1 = \frac{\sin\left(2\varphi + 3\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\frac{3\pi}{2}} = -\cos(-2\varphi - \pi) =$$

$$-\cos(-2\varphi + \pi) = \cos 2\varphi\,.$$

Conchidem:

(1) $$\lim E = E_1$$

pentru:

$$x = \varphi + k\frac{\pi}{2},$$

unde:

$$k = 2p + 1.$$

Când $k = 2p$.

$$E_1 = \frac{\sin(2\varphi + p\pi)}{\sin p\pi} \to \infty.$$

Deci:

(2) $$\lim E \neq E_1$$

pentru:

$$x = \varphi + k\frac{\pi}{2},$$

unde:

$$k = 2p.$$

In totul am presupus $a \neq 0$, $b \neq 0$.

CONSTANTIN IONESCU BUJOR

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* anul XXXVIII, No. 9, Mai 1933. Rezultatul concursului „Gazetei Matematice" din anul 1933, de *G. Ţiţeica.* Un vechiu manuscris de Aritmetică (urmare), de *Petre V. Cazanacli* Premiul „Inginer: *H. Capriel*", de Ing. *C. Orăşanu, Al. Pantazi, O. N. Ţino.* Regulamentul fondului „Inginer *H. Capriel*".

2. *Mathematica,* vol. VII, 1933, Cluj. Sur les zéros des combinaisons linéaires des p fonctions holomorphes donneés, par *Henri Cartan.* Über die abteilung zusammengesetzter funktionen, von *A. Hoborski.* Sur certains développements en séries des polynomes ortogonaux de *Tchebycheff,* par *J. Shohat* et *H. Bushey.* Fonction et Correlation, par *O. Onicescu.* Sur le théorème de *M. Borel* dans le cas des fonctions méromorphes d'ordre infini, par *Georges Calugareano.* Sur certaines propriétés projectives des familles de surfaces, par *A. Pantazi.* Un théorème sur les familles de fonctions, par *S. Ruzievicz* et *W. Sierpinski.* Les grands nombres premiers, par *M. Kraïtchik.* Sur un théorème de *M. Pompeiu* par *A. Errera.* Sur un développement en série des fonctions monogènes uniformes, par *Alexandre Ghika.* Sur une extension de la formule de *Jensen,* par *Arnaud Denjoy.* Sur une quadrique double de genres un, par *Lucien Godeaux.* Über eine bedingung die dem lokalen zusammenhange äquivalent ist, von *Karol Borsuk.* Le probléme de *Dirichlet* sous sa forme moderne, par *Marcel Brelot.*

3. *Bulletin de Mathématique et de Physique pure et appliquées,* de l'école Polytechnique *„Roi Carol II."*, III-ème années, fasc. 9 (1932–1933), Bucarest. Zwei Beiträge zu einem Satz des Herrn *Pompeiu,* von *O. Onicescu* und *G. Mihoc.* Remarque sur une formule de la moyenne, par *Ernest Abason.* Sur le mouvement d'un solide rigide, par *V. Vâlcovici.* Sur la distribution des vitesses et des accélérations dans un solide en mouvement, par *Luca Theodoriu.* Détermination précise de la distance focale avec le fotomètre *Silbermann,* par *D. Teodorescu.* Congrès international d'électricité, par *D Ghermani.*

4. *Boletin Matematico elemental* An IV, No. 1–2, Martie, Aprilie 1933. Buenos Aires, Republica Argentina, Media: aritmetică, geometrică şi armonică, de *B. I. Baidaff.* O teoremă interesantă asupra trapezului, de *B. I. Baidaff.*

5. *Revista Matematică a elevilor Craioveni,* anul II. No. 3–4, Maiu-Iunie 1933 Divizibilitatea expresiunilor aritmetice, de *Petropol D. C-tin.* O demonstraţie a teoreremei lui *Pitagora,* de *Predoescu I. M.*

PROBLEME REZOLVATE

1033. — *Să se rezolve ecuaţia:*

$$x^9 + 2x^8 + x^7 + 6x^6 + 7x^5 - 2x^4 + 3x^3 + x^2 - 12x - 8 = 0.$$

COL. GH. BUICLIU

Prima soluţie. Dacă ecuaţia are rădăcini întregi, acestea se vor găsi printre divizorii lui 8 Inlocuind pe x din ecuaţie pe rând prin aceşti divizori, se găseşte că 1, — 1 şi — 2 verifică ecuaţia. Prin împărţiri avem, însemnând cu $F(x)$ primul membru al ecuaţiei date:

$$F(x) = (x-1)(x+1)^3(x+2)(x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4) = 0.$$

Rămâne de rezolvat ecuaţia:

(1) $$f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = 0.$$

Aplicăm metoda dată de D-l *Col. Gh. Buicliu* în articolul *„Un caz de rezolvare a ecuaţiei de gradul al patrulea"*, publicat în R. M. T. Vol. X, pag. 13. Conform acelui articol ecuaţia:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

se poate pune sub forma:

$$(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2 + \delta^2 x^2 = 0$$

când:

$$a^2 d - c^2 = 0.$$

Ori ecuaţia (1) îndeplineşte această condiţie aşa că procedând ca în articolul citat se găseşte:

$$f(x) = (x^2 - x + 2)^2 + 0\,x^2 = 0$$

* * * $$(x^2 - x + 2)^2 = 0.$$

Rădăcinele acestei ecuaţii sunt $\frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$. Aşa dar ecuaţia propusă are următoarele 9 rădăcini:

$x_1 = -2 \quad ; \quad x_2 = x_3 = x_4 = -1 \quad ; \quad x_5 = 1$

$$x_6 = x_7 = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}$$

$$x_8 = x_9 = \frac{1 - i\sqrt{7}}{2}$$

Soluție dată de d-nii: *Boerescu P. G.* (Lic. Oltenita), *Mihăileanu N. N.* (Constanța), *Motoc D. M.* (Lic. Oltenița), *Pop Leontin* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Popa Gh. I.* (Oltenița) și *Purcel At.* (Șc. Politechnică, Timișoara).

Soluția 2-a. Ecuația (1) de la prima soluție se scrie succesiv:

$$(x^4 - x^3 + 2x^2) - (x^3 - x^2 + 2x) + (2x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$x^2(x^2 - x + 2) - x(x^2 - x + 2) + 2(x^2 - x + 2) = 0$$

$$(x^2 - x + 2)(x^2 - x + 2) = 0$$

Soluție, dată de d-l *Ivănescu C.* (Bârlad).

Soluția 3-a. Ecuația (1) se poate scrie:

$$x^2 + \frac{4}{x^2} - 2\left(x + \frac{2}{x}\right) + 5 = 0,$$

care se reduce la rezolvarea ecuației:

$$y^2 - 2y + 3 = 0$$

în care:

$$y = x + \frac{2}{x}.$$

Soluție, dată de d-nii: *Nicolaescu St.* (R. Vâlcea), *Pănoiu Ed.* (Lic. Craiova), *Pop B. I.*, *Predoescu I. M.* (Lic. Buzești, Craiova), *Șerban T.*, *Stan I.* (Lic. Roman) și *Zamfir D.* (Șc. Navală).

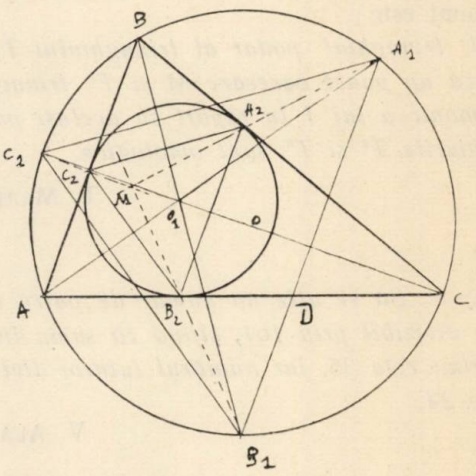
Au găsit toate soluțiile pe alte căi d-nii: *Coandă I. V.*' *Cojocaru M. M.* (Lic. Militar, Craiova); *Curchi I.* (Chișinău); *Dan T. Tr.* (Lic. Beiuș); *Dăscălescu St. H.* (Student, București); *Diaconescu I. C.* (Lic. Mizil); *Gheo ghe V.* (Lic. Militar, Tg. Mureș); *Grinberg N. M.* (Student, Iași); *Ioanin C. Gh.* (Lic. Carol I, Craiova); *Ilie C. I.* (Lic. Militar, Tg. Mureș); *Margulius M.* (Lic. Sp. Haret, București); *Mârza V.* (Șc. Politecnică); *Mehedinți D. D.* (Lic. Militar, Tg. Mureș); *Negrea L. M.* (Student, București); *Nenciulescu H., Petre C.* (Lic. Militar, Tg. Mureș); *Predoiu Fl.* (Șc. Navală); *Savovici Fl., Sfârleaza P.* (Lic. Militar, Tg. Mureș); *Ștefănescu An.* (București); *Țică P. M.* (Bacalaureat, Craiova) și *Trică S. I.* (Constanța).

Observare. D-nii: *Curchi I.* și *Margulius M.* anunță că o ecuație analoagă ar fi rezolvată la pagina 99 în „*Algebra superioară pentru clasa VIII.*" de d-l *P. Marinescu* și că acea ecuație ar fi luată din *Briot*. Nu am cunoștință de acestea. Eu am compus ecuația, care face obiectul problemei 1033, foarte ușoară după cum s-a văzut, pentru a o da ca aplicație simplă la articolul de la pag. 13 Vol. X. al *R. M. I.*

1083. — *Dacă A_1, B_1, C_1 sunt intersecțiile bisectoarelor triunghiului ABC cu cercul său circumscris și A_2, B_2, C_2 punctele de contact ale laturilor cu cercul înscris, atunci dreptele A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 sunt concurente.*

ALEXANDRU NICOLAU

Construim figura în condițiile problemei. Fie D intersecția lui AC cu A_1B_1



Observăm cu ușurință pe figură, că putem scri succesiv:

$$\text{măs}.\overset{\frown}{A_1DC} = \frac{1}{2}\text{arc}(A_1C + AB_1) =$$

(1)

$$\text{măs}.\frac{A+B}{2} = \text{măs}\left(90^0 - \frac{C}{2}\right)$$

De altă parte observăm că triunghiul CA_2B_2 este isoscel, având $CA_2 = CB_2$, ca fiind tangente cercului înscris E, duse din același punct C.

Rezultă de aci:

(2) $$\sphericalangle A_2B_2C = 90^0 - \frac{C}{2}.$$

Din relațiile (1) și (2) deducem:

$$\sphericalangle A_1DC = \sphericalangle A_2B_2C,$$

de unde conchidem că A_1B_1 este paralelă cu A_2B_2.

Analog se demonstrează că A_1C_1 este paralelă cu A_2C_2 și B_1C_1 este paralelă cu B_2C_2. Urmează de aci că triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ sunt omotetice și atunci dreptele A_1A_2, B_1B_2,

$C_1 C_2$ care unesc vârfurile lor, sunt concurente, punctul de concurenţă M fiind centru de omotetie.

Soluţii date de d-nii: *Băleanu Emil* (lic. M-rea Dealu). *Ivănescu Cezar* (bacalaureat, Bârlad) *Mihăileanu N. N* (Constanţa), *Margulius Marius* (Bucureşti), *Popescu C. Ştefan*, *Săndulescu I. Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Süli Mihai* (Şc Polit, Timişoara) şi *Triscă Ioan* (Constanţa).

Observare. Dl *Mihăileanu N. N.* (Constanţa) observă că această problemă se poate deduce uşor din problema 3003 din *Gazeta Matematică*, al cărei enunţ este:

Fie T' triunghiul podar al triunghiului T, în raport cu un punct oarecare M şi T" triunghiul metaarmonic a lui T în raport cu acelaşi punct. Triunghiurile T' şi T" sunt omologice.

T MARES

1121. — *Să se afle un număr de patru cifre diferite divizibil prin 161, ştiind că suma divizorilor primi este 35, iar numărul tuturor divizorilor este 24.*

V. ALACI

Fie N numărul căutat. Cum N este divizibil prin 161 şi cum:

$$161 = 7 \times 23,$$

rezultă că 7 şi 23 sunt divizori a-i lui N. Suma acestor doi divizori este 30 şi cum suma tuturor divizorilor primi a-i lui N este 35, urmează că alţi divizori a-i lui pot fi numai 2, 3 sau numai 5, adică N e de forma:

$$(1) \qquad N = 2^{\alpha} \times 3^{\beta} \times 7 \times 23,$$

sau:

$$(2) \qquad N = 5^{\gamma} \times 7 \times 23.$$

Mai ştim din enunţ că numărul tuturor divizorilor lui N este 24, ceea ce ne conduce a scri corespunzător celor două forme pentru N:

$$(1') \qquad (\alpha + 1)(\beta + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 24.$$

$$(2') \qquad (\gamma + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 24.$$

Din (1') deducem:

$$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 6,$$

şi deci:

$$\alpha = \frac{6}{\beta + 1} - 1.$$

Această relaţie, î-i verificată în numere întregi, (căci α şi β sunt întregi pozitivi), numai de sistemele de valori:

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases},$$

care introduse în (1) ne dau:

$$N = 2^2 \times 3 \times 7 \times 23 = 1932$$

$$N = 2 \times 3^2 \times 7 \times 23 = 2898$$

Cum în enunţ se mai impune condiţia ca N să aibă patru cifre diferite, rezultă că numai:

$$N = 1932,$$

este soluţie.

Să examinăm şi condiţia (2'). Din (2') deducem:

$$\gamma = 5,$$

şi atunc din (2) rezultă:

$$N = 5^5 \times 7 \times 23 = 503125,$$

care, având mai mult de patru cifre, nu este soluţie. Singura soluţie a problemei este deci:

$$N = 1932,$$

anul în care s'a propus problema.

Soluţii date de d-nii: *Boisnard Jean* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Coman Alexandru* (Năsăud), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit., de Artilerie), *Mazilu Panaite* (lic. Internat, Iaşi), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Motoc D. Mircea* (Oltenita), *Sâmbotin Gh.* (Sub-Lt.) şi *Vasiliu-Leoben Gh.* (Inginer)

Alte soluţiuni mai lungi de d-nii: *Chiriac C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Ionescu C. Emil* (bacalaureat, Craiova), *Ivănescu Cezar* (bacalaureat, Bârlad) şi *Predoescu I. Marin* (lic. Buzeşti, Craiova).

1122. — *Un negustor depune la o bancă o sumă de bani cu 9%. După 2 ani retrage capitalul împreună cu dobânda şi unindu-le depune noul capital cu 10%. După 3 ani retrage capitalul împreună cu dobânda lui şi unindu-le iarăşi formează noul capital pe care'l depune cu 12% şi astfel după un an are un venit de 13806 lei.*

Care a fost capitalul de la început şi care va fi suma ce o va avea la urmă?

VIRGIL CLAUDIAN

Soluție aritmetică. Capitalul C, care aduce venitul de 13806, dat cu 12% pe an, este:

$$C = \frac{13806 \times 100}{12} = 115050 \text{ lei.}$$

Suma de 115050 lei, cuprinde conform enunțului un capital C_1 împreună cu dobânda lui după 3 ani, depus cu 10% pe an. Cum 100 lei după 3 ani cu 10% pe an, devine 130 lei, rezultă că:

$$C_1 = \frac{115050}{130} \times 100 = 88500 \text{ lei,}$$

este capitalul de la începutul celor 3 ani.

Această sumă de 88500 lei, cuprinde un capital C_2 împreună cu dobânda lui după 2 ani, depus cu 9% pe an.

Cum 100 lei după 2 ani cu 9% pe an, devine 118 lei, rezultă că:

$$C_2 = \frac{88500}{118} \times 100 = 75000 \text{ lei.}$$

Capitalul depus la început, a fost de 75000 lei, iar suma strânsă la sfârșit este:

$$115050 + 13806 = 128856 \text{ lei.}$$

Soluții date de d-nii: *Costache I. Gheorghe* (lic. Mizil), *Diaconescu I. C-tin* (lic. Mizil), *Ciavrilescu Gheorghe* (lic. Mizil), *Georgescu N. Mihail* (lic. Mizil), *Ghiță Traian* (lic. Mizil), *Grama Marin* (lic. Milit., Tg.-Mureș) *Iacobescu I. Oprea* (lic. Mizil), *Ionescu Emil* (bacalaureat, Craiova), *Ionescu M. Gheorghe* (lic. Mizil), *Ionescu S. Stelian* (lic. Mizil), *Juga Ioan* (lic. Mizil), *Ivănescu Cezar* (bacalaureat, Bârlad), *Matei Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Mehedinți D.* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Niculescu Vasile* (lic. Mizil), *Oancea I. Andrei* (lic. Mizil), *Predescu P. Gheorghe* (lic. Mizil), *Predoescu Traian* (lic. Milit., Craiova), *Rădulescu T. Dumitru* (lic. Mizil), *Sâmbotin Gheorghe* (Sub-Lt), *Sân-Petru Dumitru* (lic. Mizil), *Șiora I. Virgil* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Soare I. Ilie* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Stanciu Ștefan* (lic. Mizil), *Stefănescu I. Ioan* (lic. Mizil), *Theoharide Lucian* (Șc. Pregătitoare de Ofițeri, București), *Tica P. Marinel* (Sub-Lt), *Toma S. Ioan* (lic. Mizil), *Vasu Nicolae* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Vonica Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureș) și *Zaharia D. C-tin* (lic. Mizil).

Soluție algebrică. Fie x capitalul inițial, atunci dobânda lui pe 2 ani cu 9% pe an, este:

$$\frac{x \times 9 \times 2}{100} = \frac{9x}{50},$$

iar:

$$x + \frac{9x}{50} = \frac{59x}{50},$$

reprezintă capitalul inițial și dobânda corespunzătoare după 2 ani.

Acest nou capital $\frac{59x}{50}$, dat pe 3 ani cu 10% pe an, aduce dobânda:

$$\frac{\frac{59x}{50} \times 10 \times 3}{100} = \frac{177x}{500},$$

iar capitalul și dobânda corespunzătoare la sfârșitul acestor 3 ani, este:

$$\frac{59x}{50} + \frac{177x}{500} = \frac{767x}{500}.$$

Acest nou capital $\frac{767x}{500}$ depus cu 12% pe an, aduce într'un an 13806 lei, deci putem scri:

$$13806 = \frac{\frac{767x}{500} \times 12}{100} = \frac{767x \times 3}{12500}.$$

Rezolvând această ecuație găsim:

$$x = \frac{13806 \times 12500}{767 \times 3} = \frac{18 \times 12500}{3} = 75000 \text{ lei.}$$

Deci capitalul inițial este 75000 lei.

Capitalul corespunzător dobândei 13806 lei, este:

$$\frac{767x}{500} = \frac{767 \times 75000}{500} = 767 \times 150 = 115050 \text{ lei,}$$

căci am găsit, $x = 75000$ lei.

Rezultă că suma finală este:

$$115050 + 13806 = 128856 \text{ lei.}$$

Soluții date de d-rele: *Ichim Ermina* (Iași) și *Roșca St. Veronica* (lic. Internat, Craiova) și de d-nii: *Arbter Emil* (lic. Beiuș), *Birek Vasile* (lic. Beiuș), *Boisnard Jean* (lic. Spiru-Haret, București), *Budeanu C-tin* (București), *Chiriac C-tin* (lic. Milit., Iași), *Chiriță Mihail* (lic. Milit., Craiova), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Coman Alexandru*, *Cojocaru M.* (lic. Milit., Craiova), *Crișan T. Iacob* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Dan T. Traian* (Șc. Polit., Timișoara), *Dima Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Georgescu Șt. Ștefan* (lic Milit., Tg-Mureș), *Gheorghe Valeriu* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Gheorghiu Alexandru* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Ghiocel V. Vasile* (lic. Giurgiu), *Godeanu Ig. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Ivănescu Cesar* (bacalaureat, Bârlad), *Lățea P. C-tin* (Șc. Milit., de Artilerie), *Lupescu Gh. Corneliu* (lic. Roman), *Mazilu Panainte* (lic. Internat, Iași), *Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir, București), *Mereuță Emilian*, *Negrea A. Leonte-Mircea* (licențiat in Matematici), *Nenciulescu H.* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Olteanu M. Florian* (lic. Milit.,

Tg.-Mureş), *Păcuraru Paul* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Păunescu N.* (lic. Milit., Craiova), *Popa B. Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Popa D. Traian* (Giurgiu), *Porumbescu D.* (Tg.-Ocna), *Preda C. C-tin* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Predoescu I. M.* (lic. Buzeşti, Craiova) *Predoescu M. Traian* (lic. Milit. Craiova), *Procopiescu Mihail* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Racoteanu Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Rogojan Alexandru* (Şc. Polit., Timişoara), *Sandovici Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Santto F. Georges* (lic. Internat, Iaşi), *Săndulescu I. Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Stern M. Nicolaie* (lic. Beiuş), *Săli Mihai* (Şc. Polit, Timişoara), *Ţarălungă Dumitru* (lic. Milit., Tg-Mureş) şi *Vasiliu-Leoben Gh.* (Inginer).

Observări, 1. S'au primit două soluţiuni neiscălite.
2. S'au primit două soluţiuni identice scrise de aceiaşi persoană, însă iscălite una de un corespondent, alta de o corespondentă, ambii din Craiova. Evident că aceste soluţiuni n'au putut fi luate în consideraţie.

PROBLEME PROPUSE

1201. — Câte cifre sunt necesare pentru a scrie şirul natural al numerilor de la 1 până la n?

LT COMANDOR AV. GR. ZAPAN

1202. — Să se stabilească identitatea:

$$p^2-2q+2-\sqrt{(p^2-2q+2)^2-4(p^2+q^2-2q+1)}=\frac{8(p^2+q^2-2q+1)}{4+(p+\sqrt{p^2-4q})^2}$$

V ALACI

1203. — Să se verifice identitatea:

$$[(b+c)x+cy][(c+a)y+az][(a+b)z+bz]+[(b+c)x+bz][(c+a)y+cx][(a+b)z+ay]=(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)[(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z]$$

Să se deducă de aci identitatea:

$$abc+(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

N. BOTEA

1204. — Să se rezolve sistemul:

$$\frac{a^2x^{3n}+b^2y^{3n}+ab(xy)^n(x^n+y^n)}{ax^n(x^n+1)+by^n(y^n+1)}+c=0$$

$$ax^{2n}+by^{2n}+d=0$$

ION MARGINEANU

1205. — Soient α, β, γ les projections orthogonales du point φ de *Feuerbach* sur les diamètres du cercle inscrit I qui passent aux contacts D, E, F avec les côtés d'un triangle ABC. A_1, B_1, C_1 et A', B', C', les milieux des côtés et les pieds des hauteurs du triangle. Montrer que les cercles $A_1\alpha A'$, $B_1\beta B'$, $C_1\gamma C'$, découpent sur ID, IE, IF trois segments $Dx=Ey=Fz$, égaux à la différence des diamétres des cercles des neuf points et inscrit au triangle ABC.

V. THÉBAULT

1206. — H_1 fiind simetricul ortocentrului unui triunghiu ABC în raport cu centrul cercului circumscris, paralele duse la laturile triunghiului ABC prin A, B, C, întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului A' B' C', podar al punctului H_1, în trei puncte situate pe axul radical al cercurilor ABC, A' B' C'.

CONSTANTIN IONESCU BUJOR

1207. — ABC este un triunghiu oarecare, iar B_1 şi C_1 picioarele înălţimelor duse prin B şi C. Fie D ortocentrul triunghiului BC_1B_1, iar E simetricul lui D în raport cu BB_1.

Fie M, N, P, R proecţiile lui E respectiv pe AB, BC, CA şi B_1C_1. Să demonstreze că avem:

$$\overline{AB}\cdot\overline{EM}\cdot\overline{AC_1}\cdot\overline{EP}=\overline{AC}\cdot\overline{EN}\cdot\overline{AB_1}\cdot\overline{ER}\cdot$$

CEZAR IVANESCU

1208. — Să se arate că expresia:

$$E=\frac{h'h''}{ab}+\frac{h''h'''}{bc}+\frac{h'''h'}{ca},$$

păstrează în orice triunghiu ABC o valoare constantă, ştiind că h', h'', h''' sunt segmentele din înălţimi cuprinse între vârfuri şi ortocentru, iar a, b, c laturile triunghiului considerat.

GH. LEOBEN VASILIU

INFORMAȚIUNI

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS
1 an: Belgique, **30 fr**. France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**

Administration
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

PREMIUL TRAIAN LALESCU în valoare de 10.000 (zece mii) lei, oferit de *Revista Universitară Matematică* de sub conducerea d. Prof. Dr. *Rodolphe Racliș*, celor mai distinși Licențiați în Științe Matematice sau Ingineri Diplomați, a fost decernat pentru anul 1932, d-lui *Cezar Coșniță*, Licențiat în Științe Matematice de la Facultatea de Științe din București

Pentru anul 1931 premiul n'a fost decernat, în schimb suma corespunzătoare de 10.000 (zece mii) lei a fost oferită tot d-lui *Cezar Coșniță*, ajutor de cărți.

LA REDACȚIA „REVISTEI MATEMATICE DIN TIMIȘOARA SE PRIMESC ABONAMENTE PENTRU ANUL AL V-LEA (MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)

DE BOLETIN MATEMATICO

COSTUL UNUI ABONAMENT FIIND DE 300 LEI ȘI PENTRU ANUL AL III-LEA (MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)

DE BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

COSTUL ABONAMENTULUI FIIND DE 125 LEI, PUBLICATE ÎN BUENOS AIRES; AMÂNDOUĂ 400 LEI

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Abonamentul pe anul XIII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă **100 (UNA SUTA) LEI** și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU, Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL XIII. 15 IULIE 1933 No 5.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. I. V. MATIEȘ: CATEVA TEOREME IN LEGATURA CU TERMINATIUNEA PUTERILOR NUMERILOR INTREGI.
2. ING. GH. LEOBEN VASILIU: EROAREA MEDIEI ARITMETICE.
3. NOTE MATEMATICE: 9.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 989 1081, 1098, 1110, 1130. 1131.
6. PROBLEME PROPUSE: 1209-1216.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Artegrafice „Tipografia Românească"

Avem plăcerea a anunța că începând dela 15 Aprilie 1933, mai face parte dintre membrii „Revistei Matematice din Timișoara" și *D-l Nicolae G. Botea,* licențiat în Matematici, Calea Floreasca 46, București 3.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Școala Politechnică din Timișoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timișoara" este pentru anul XIII, de 200 (două sute) lei.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XII inclusiv, broșate, 120 lei fiecare

---

ANUL XIII – No 5. TIMISOARA, 15 IULIE 1933

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie.

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

CÂTEVA TEOREME IN LEGĂTURĂ CU TERMINAȚIUNEA PUTERILOR NUMERELOR INTREGI

de

I. V. MĂTIEȘ prof., Blaj.

In legătură cu problema:

Ce puteri ale unui număr întreg se termină cu același grup de p cifre? stabilesc următoarele:

Problema se reduce la determinarea lui m și n, astfel ca N^m și N^n să se termine cu același grup N_p, de p cifre, N, m, n și p fiind numere întregi, iar N_p un număr de p cifre.

Fără nici o particularizare, pot pune $m = n + k$ și atunci sunt condus să determin puterile n și k, astfel ca N^n și N^{n+k} să se termine cu N_p, oricari ar fi N întreg.

Se pot enunța și demonstra, în legătură cu problema inițială astfel privită, următoarele teoreme:

1. Dacă N și N^{k+1} se termină cu grupul comun N_p, de p cifre, atunci și N^n și N^{n+k} se termină cu un grup comun de p cifre, oricare ar fi N.

Fie:

$$N = 10^p A + N_p \quad \text{și} \quad N^{k+1} = 10^p B + N_p$$

$$N^{n-1} = (10^p A + N_p)^{n-1} = \text{Mult } 10^p + (N_p)^{n-1},$$

iar:

$$N^{n-1} \times N^{k+1} = (\text{Mult } 10^p + N^{n-1})\ (10^p B + N_p)$$

$$N^{n+k} = 10^p B' + (N_p)^n$$

și pe de altă parte:

$$N^n = (10^p A + N_p)^n = 10^p A' + (N_p)^n$$

2. Dacă numerele prime N_1 și N_2 satisfac egalitățile:

$$N_1^n = \text{Mult } 10^p + N_p, \quad N_1^m = \text{Mult } 10^p + N_p,$$

$$N_2^n = \text{Mult } 10^p + N'_p, \quad N_2^m = \text{Mult } 10^p + N'_p,$$

atunci, ele satisfac și egalitățile:

$$(N_1 . N_2)^n = \text{Mult } 10^p + M_p$$

și:

$$(N_1 . N_2)^m = \text{Mult } 10^p + M_p$$

unde M_p e un număr de p cifre.

Intr'adevăr:

$$(N_1 . N_2)^n = (\text{Mult } 10^p + N_p)\ (\text{Mult } 10^p + N'_p) = \text{Mult } 10^p + M_p$$

$$(N_1 . N_2)^m = (\text{Mult } 10^p + N_p)\ (\text{Mult } 10^p + N'_p) = \text{Mult } 10^p + M_p$$

și teorema este demonstrată.

3 *Dacă numărul N_p, de p cifre satisface egalităților:*

$$(N_p)^n = \text{Mult } 10^p + M_p$$

și

$$(N_p)^m = \text{Mult } 10^p + M_p,$$

atunci există și egalitățile:

$$N^n = (\text{Mult } 10^p + N_p)^n = \text{Mult } 10^p + M_p$$

$$N^m = (\text{Mult } 10^p + N_p)^m = \text{Mult } 10^p + M_p,$$

unde N_p, M_p sunt numere de p cifre.

Intr'adevăr:

$$(\text{Mult } 10^p + N_p)^n = \text{Mult } 10^p + (N_p)^n = \text{Mult } 10^p + M_p$$

$$N^n = \text{Mult } 10^p + M_p$$

și în mod analog se demonstrează și pentru N^m.

4. Dacă numerele întregi N^n și N^{n+k} se termină cu același grup de p cifre, atunci și numărul N^{n+kr} se termină cu același grup de p cifre, n, k și r fiind întregi oricari.

Fie:

$$N^n = \text{Mult } 10^p + N_p\ ,\quad N^k = \text{Mult } 10^p + M_p\ ,$$

$$N^{n+k} = \text{Mult } 10^p + N_p$$

și deci se obține:

$$N^n \times N^k = (\text{Mult } 10^p + N_p)\ (\text{Mult } 10^p + M_p) =$$

$$\text{Mult } 10^p + N_p$$

$$\text{sau} \qquad N_p \times M_p = \text{Mult } 10^p + N_p\ .$$

In mod succesiv mai obțin:

$$N^{2k+n} = (N^{k+n})\, N^k =$$

$$(\text{Mult } 10^p + N_p)\ (\text{Mult } 10^p + M_p) = \text{Mult } 10^p + N_p$$

$$N^{3k+n} = (N^{2k+n})\, N^k =$$

$$(\text{Mult } 10^p + N_p)\ (\text{Mult } 10^p + M_p) = \text{Mult } 10^p + N_p$$

. . . . . .

$$N^{rk+n}\left[N^{(r-1)k+n}\right] N^k =$$

$$(\text{Mult } 10^p + N_p)\ (\text{Mult } 10^p + M_p) = \text{Mult } 10^p + N_p$$

Ținând seama de aceste teoreme, sunt condus la studierea următoarei probleme:

Care este cea mai mică putere întreagă, la care dacă ridicăm un număr prim oricari, mai mic decât 10^p, grupul de p cifre, în care se termină, să nu se schimbe.

Fie N un număr prim, inferior lui 10^p și $k+1$ cea mai mică putere, astfel ca numerele N și N^{k+1} să se termine cu același grup de p cifre. Deci trebue ca:

$$E = N^{k+1} - N$$

să se dividă cu 10^p sau să fie zero.

In cazurile numerice date pentru p, problema a fost tratată și până acum, dar altfel și nu s'au evidențiat cele patru teoreme generale, cari au rolul de a restrânge domeniul de cercetare, fără nici o particularizare.

Observări. 1°. In cazul particular, $p = 1$, obțin problema 3783, propusă de *D-l Col. Gh. Buiciu,* în *Gazeta Matematică, vol. XXXI, pag. 381* și a cărei soluție s'a dat în vol. XXXVI, pag. 307.

2°. Pentru $p = 2$ problema a fost tratată de subsemnatul în *Gazeta Matematică, vol. XXXVII, pag. 330* ș. u. unde am ajuns la următorul rezultat:

Numerele întregi N^n și N^m se termină cu același grup de două cifre, în cazul când $m = 20k + n$, k, n și N *fiind numere întregi oricari.*

Excepții: a) Pentru $N = 1$, n și m pot fi oricari. b) Pentru N pereche, trebue ca $n \neq 1$. c) Pentru N terminat cu 5, dar nedivizibil cu 25, trebue ca $n \neq 1$ și m poate fi oricari.

3°. Problema se poate trata și pentru $p = 3, 4$, dar se îngreunează cercetările și calculele sunt mari. De altfel subiectul propus nu-mi era determinarea lui m și n în diversele cazuri ale lui p. Acest subiect rămâne încă deschis pentru $p \geqq 3$.

EROAREA MEDIEI ARITMETICE

de

ING GHEORGHE LEOBEN VASILIU

Fie X măsura exactă a unei mărimi și $x_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ rezultatul unei măsurători a aceleași mărimi, care evident, din anumite cauze, a instrumentului a persoanei care efectuează măsurarea sau a altor cauze prevăzute sau neprevăzute, va fi afectată de o eroare $\pm\varepsilon$, față de măsura exactă X, astfel că avem:

$$(1) \qquad \pm\varepsilon = X - x_i\ ,$$

dupe cum $X \gtrless x_i$.

Să facem media aritmetică simplă a celor $i = n$ cantități x_i; adică fie:

$$(2) \qquad x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

și să notăm cu:

$$(3) \qquad v_i = x - x_i$$

zic că v_i poartă numele de *eroare aparentă* *) a unei

*) în franțuzește: erreurs présumées sau: apparentes; în nemțește: scheinbaren Fehlern; în englezește: residuals și italienește: scostamenti.

măsurători oarecare i, spre deosebire de $\pm \varepsilon_i$ care este o *eroare reală* a aceleaşi măsurători i.

Aşa dar avem două feluri de erori una reală $\pm \varepsilon$ definiţă prin relaţia (1), eroare ce neputându-se calcula (deoarece X este presupus cunoscut, în realitate noi tocmai pe X vrem să-l găsim); am fost nevoiţi a introduce o a doua eroare aparentă v definită prin (3) — este clar că egalitatea eroarei reală $\pm \varepsilon$, cu eroarea aparentă v, implică egalitatea lui X cu media aritmetică x, deoarece:

$$\pm \varepsilon_i = v_i + (X - x) \tag{4}$$

Să ne ocupăm puţin de diferenţa $(X - x)$. Ea reprezintă valoarea abaterei mediei aritmetice, a celor i rezultate x_i, dela adevărata mărime X. Să o notăm cu M; adică fie:

$$M = X - x = \pm \varepsilon_i - v_i \tag{5}$$

Voiu face asupra lui M, *eroarea mediei aritmetice*, următoarele precizări din punct de vedere al semnului:

I. eroarea mediei aritmetice este pozitivă când eroarea reală este pozitivă şi mai mare în valoare absolută ca eroarea aparentă

II. eroarea mediei aritmetice este negativă când:

1. eroarea reală este negativă indiferent mărimea ei faţă de eroarea aparentă, sau când:

2. eroarea reală, fiind mai mică în valoare absolută ca eroarea aparentă, este pozitivă.

Mai putem spune că M este pozitiv când media aritmetică este mai mare ca X şi negativă în caz contrar.

In rezumat:

$M > 0$	$X > x$	$\varepsilon \gtrless 0$ $> v$
$M < 0$	$X < x$	$\varepsilon \lesseqgtr 0$ $\gtrless v$
		$\varepsilon \gtrless 0$ $< v$

Am determinat pe M ca semn, să-l determinăm şi ca mărime. Pentru aceasta observ că M este o eroare funcţiune de erorile „m" cu care sunt afectate fiecare din măsurătorile noastre x_i în parte, adică:

$$M = f(m) \tag{6}$$

Din relaţiile (1) scoatem însă că:

$$X = x_1 \pm \varepsilon_1 = x_2 \pm \varepsilon_2 = \ldots = x_n \pm \varepsilon_n$$

sau:

$$n X = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} (\pm \varepsilon_i)$$

şi ţinând seama de relaţiile (2) şi (5), ridicând la patrat putem scrie că:

$$X - x = M = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\pm \varepsilon_i)}{n} \tag{**}$$

$$M^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2 + 2(\pm \varepsilon_1 \varepsilon_2 \pm \ldots + \varepsilon_{n-1} \varepsilon_n)}{n^2}$$

Deoarece suma produselor luate câte două a erorilor reale $\pm \varepsilon$ pentru un număr destul de mare de observaţiuni $i = n$, tinde către zero (se presupune că erorile $+\varepsilon$, pozitive sunt tot atâta de probabile ca şi erorile $-\varepsilon$, negative, şi că ele se pot grupa simetric împrejurul eroarei ideale $\varepsilon = 0$); ne rămâne că:

$$M = \pm \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}}{n}, \tag{7}$$

formulă care ne dă eroarea mediei aritmetice în funcţiune de erorile reale ε.

Prin definiţie însă se numeşte eroarea mediei patratice sau eroarea mijlocie a unui şir de observaţiuni, rădăcina patrată a câtului dintre suma patratelor erorilor reale $\pm \varepsilon$ prin numărul lor* adică:

$$m = \pm \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}}{n} \tag{8}$$

deci (7) devine:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} \tag{9}$$

Teoretic formulele (7) şi (9) îşi au însemnătatea lor, din ele putându-se trage concluzii importante, practic însă ele nu prezintă deocamdată nici un avantaj, deoarece ε ne este numeric incalculabil. Dea-

*) vezi *Gauss*: Theoria combinationis art. 7.

ceea vom încerca să exprimăm pe m şi M în funcţiune de singura eroare direct calculabilă v, adică:

$$m = f(v) \tag{10}$$

Pentru aceasta ridic la patrat relaţiile (4) şi le adunăm:

$$\varepsilon_1^2 = v_1^2 + 2\,v_1\,(X - x_1) + (X - x_1)^2$$
$$\varepsilon_2^2 = v_2^2 + 2\,v_2\,(X - x_2) + (X - x_2)^2$$
$$\vdots$$
$$\varepsilon_n^2 = v_n^2 + 2\,v_n\,(X - x_n) + (X - x_n)^2\,,$$

care însumate, ne dau:

$$** \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} v_i\,(X - x_i) + \sum_{i=1}^{n} (X - x_i)^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + 2\,n\,(X - x) \sum_{i=1}^{n} v_i + n\,(X - x)^2$$

şi ţinând seama de (2) şi (5):

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + n\,(X - x)^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + n\,M^2\,, \tag{11}$$

de oarece:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$$

In fine relaţiile (7), (8) şi (11), ne dau:

$$m^2\,n = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + n\,M^2\,,$$

de unde:

$$m = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}} \tag{12}$$

şi:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n\,(n-1)}} \tag{13}$$

Atrag atenţia că m definit de (8) este o eroare reală şi caracterizează şirul (1); putând fi privită ca o eroare ce afectează fiecare observaţiune în parte, — spre deosebire de acelaş „m“ definit însă prin relaţia (12) care caracterizează şirul (2). — Am insistat asupra acestora, — cari par a fi lucruri uşoare, căci ele formează elementele de bază din Calculul Erorilor.

Cu această ocazie ţiu să atrag atenţia asupra unei greşeli ce s'a strecurat în articolul „Media Aritmetică“ din R. M. T. vol. VII. pag. 161 şi anume (referindu-ne la notaţiile din l. c.)

$$*a = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n}}$$

nu poate caractiza şirul:

$$x_i = v_n - u_i\,,$$

tocmai prin faptul că acest şir x_i este format din erori aparente (v_n este aici media aritmetică etc...) iar formula a, are prin definiţie forma aceasta numai atunci când ea se referă la erori reale. Deci formula care caracterizează şirul este cea dela (12).

Chiar în Cursul de Geodezie de *Ioan G. Vidraşcu* predat la şcoala Politechnică din Bucureşti pag. 17 se trece dela formula (8) la (12) printr'o observaţiune a insuficienţei ei, când eroarea reală ε este înlocuită prin eroarea aparentă v, — fără însă a se da o demonstrare riguros matematică.

Pentru încheere mai pun la îndemâna cetitorilor, o demonstrare a formulei (12) bazată pe o teorie ce încă din 1881 de *Breget* deoparte şi de *Jordan* dealtă parte a fost concepută şi anume că diferenţa d a două măsurători oarecari x_1 şi x_2 poate fi introdusă ca măsură de exactitate în Calculul Erorilor.

Observând că în cazul a două măsurători am:

$$d = x_2 - x_1$$

şi punând:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

pot scrie că:

$$d = (x - x_2) - (x - x_1) = v_2 - v_2$$

In felul acesta cu cele x_i rezultate obţinute prin măsurarea de i ori a cantităţei X pot forma $n\,\frac{n-1}{2}$ diferenţe:

---

* In l. c., din eroare de tipar, formula a fost scrisă fără semnul Σ sub radical.

$$v_1 - v_2$$

$$v_1 - v_3 \quad v_2 - v_3$$

$$v_1 - v_4 \quad v_2 - v_4 \quad v_3 - v_4$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$v_1 - v_n \quad v_2 - v_n \quad v_3 - v_n \ldots v_{n-1} - v_n$$

Aceste $n\dfrac{n-1}{2}$ diferenţe ridicate la patrat şi adunate ne dau că:

$$(14) \qquad \sum d^2 = (n-1)\sum_{i=1}^{n} v_i^2 - 2\sum v_j v_k \ ,$$

şi ţinând seama că:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)^2 = 0 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 + 2\sum v_j v_k$$

pot să scriu:

$$(15) \qquad \sum d^2 = n\sum_{i=1}^{n} v_i^2 .$$

Pe dealtă parte se cunoaşte formula:

$$(16) \qquad m = \sqrt{\frac{\sum d^2}{p}} \ ,$$

formulă a cărei deducere este dealtfel imediată; dacă considerăm două siruri a câte p observaţiuni fiecare v_j şi v'_j şi scriem că:

$$x_j - x'_j = d_j = \varepsilon_j - \varepsilon_j \ ,$$

unde:

$$j = 1, 2 \ldots, p$$

ridicând la patrat, adunând şi ţinând seama de cele spuse la începutul articolului, avem formula (16) stabilită:

Ori cum în (15), avem $n\dfrac{n-1}{2}$ diferenţe, (16) devine:

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}}$$

NOTE MATEMATICE

9. — *Asupra unor determinanţi.*

Fie Δ un determinant oarecare de gradul n.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} ,$$

ian $u_1, u_2, \ldots u_n$ nişte numere arbitrare. Dacă substituim în Δ, o coloană oarecare cu aceste numere, iar determinantul astfel obţinut îl înmulţim cu unul din elementele scoase, astfel ca acest element să facă parte dintr'o linie anumită, linie de ordinul k de exemplu şi procedăm în mod analog cu toate coloanele şi facem suma acestor produse, obţinem ca rezultat $u_k \Delta$.

Relaţia ce trebue demontrată, este:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{k\,i} \Delta_i = u_k \Delta \ ,$$

unde Δ_i este determinantul ce se obţine din Δ, înlocuind elementele coloanei de rangul i prin numerele $u_1, u_2, \ldots u_n$.

Demonstraţia. Consideram determinantul:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_{k1} & a_{k2} \ldots a_{kn} \\ u_1 & a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ u_k & a_{k1} & a_{k2} \ldots a_{kn} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \\ u_n & a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Desvoltând acest determinant după elementele liniei întâia şi ţinând seamă de definiţia determinanţilor Δ_i, obţinem:

$$D = -a_{k1}\Delta_1 - a_{k2}\Delta_2 - \ldots a_{kn}\Delta_n \ ,$$

sau:

$$(1) \qquad -D = \sum_{i=1}^{n} a_{k\,i}\Delta_i$$

Scăzând acum în determinantul D, linia de rangul $k+1$, din prima linie, obţinem:

$$(2)\quad D=\begin{vmatrix} -u_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ u_k & & \Delta & & \\ \vdots & & & & \\ u_n & & & & \end{vmatrix} = -u_k\Delta, \text{ sau } -D = u_k\Delta.$$

Din (1) şi (2) deducem:

$$(3)\quad \sum_{i=1}^{n} a_{k\,i}\Delta_i = u_k\Delta,$$

tocmai ceiace trebuia demonstrat.

Cu ajutorul acestei teoreme, voi demonstra alte teoreme demonstrate într'alt mod în „R. M. T.".

Făcând în (3) succesiv $k=1, 2 \dots n$, obţinem:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1\,i}\Delta_i = u_1\Delta$$

$$\sum_{i=2}^{n} a_{2\,i}\Delta_i = u_2\Delta$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{n\,i}\Delta_i = u_n\Delta$$

Făcând suma acestor egalităţi şi însemnând cu S_i suma elementelor coloanei de rangul i din Δ, obţinem:

$$(4)\quad \sum_{i=1}^{n} S_i\Delta_i = (u_1+u_2+\dots+u_n)\Delta,$$

care este tocmai relaţia demonstrată de D-l *V. Alaci* în „R. M. T.", vol. V, No. 2.

Să considerăm determinantul:

$$\begin{vmatrix} a_{1\,1}\,k_1 & a_{1\,2}\,k_1 & \dots & a_{1\,n}\,k_1 \\ a_{2\,1}\,k_2 & a_{2\,2}\,k_2 & \dots & a_{2\,n}\,k_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n\,1}\,k_n & a_{n\,2}\,k_n & \dots & a_{n\,n}\,k_n \end{vmatrix}$$

Considerând nişte numere arbitrare $u_1, u_2 \dots u_n$, conform relaţiei (4) avem:

$$(5)\quad \sum_{i=1}^{n} S'_i\Delta'_i = (u_1k_1+u_1k_2+\dots+u_nk_n)\Delta',$$

unde:

$$S'_i = a_{1\,i}\,k_i + a_{2\,i}\,k_2 + \dots + a_{n\,i}\,k_n,$$

iar Δ'_i se obţine din Δ' substituind elementele coloanei de rangul i, prin elementele $u_1\,k_1, u_2\,k_2, \dots u_n\,k_n$ şi deci:

$$(6)\quad \Delta'_i = k_1\,k_2 \dots k_n\,\Delta_i,$$

unde Δ_i este definit din enunţul primei teoreme.

Observând că:

$$\Delta' = k_1\,k_2 \dots k_n\,\Delta_i,$$

Δ fiind determinantul considerat la început, relaţia (5), ţinând seamă de (6), devine:

$$k_1\,k_2 \dots k_n \sum_{i=1}^{n} \Delta_i S'_i = k_1\,k_2 \dots k_n\,\Delta \sum_{i=1}^{n} u_i k_i,$$

sau:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_i S'_i = \Delta \sum_{i=1}^{n} u_i k_i,$$

care este tocmai relaţia demonstraţă într'alt mod de D-l *G. Constantinescu* în „R. M. T.", vol. V, No. 3.

In cazul particular $u_1 = u_2 = \dots = u_n = 1$, relaţia (3) devine:

$$\sum_{i=1}^{n} a\,k_i\Delta_i = \Delta,$$

relaţie demonstrată de D-l *G. Constantinescu* în „R. M. T.", vol. V, No. 3 şi care vedem uşor că există şi în cazul mai general, când singur $u_k = 1$.

M. I. PREDOESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXVIII, No. 10, Iunie 1933. Invăţământul Aritmeticei în liceele noastre, de *I. Ionescu*. Proprietăţi ale triunghiului (urmare), de *N. G. Botea*. Raportul Comisiunei pentru acordarea premiului „*V. Cristescu*", de *N. Botea, Colonel Liteanu, Căpitan G. Niculescu*. Asupra premiului „*Inginer H. Capriel*", de *Ing. C. Orăsanu, Al. Pantazi, O. N. Ţino*.

2. *Boletin Matematico Elemental*, An. IV, Mai 1933, Buenos Aires, Republica Argentina, publicat de *Dr. Bernardo Baidaff*. O teoremă a paralelelor, de *B. I. Baidaff*.

PROBLEME REZOLVATE

989 — *Să se găsească numărul întreg $\overline{ab}$, format din numerele a și b de același număr de cifre scrise unul după altul, știind că rădăcina patrată a lui $\overline{ab}$ este numărul zecimal a_1, b^1 în care a_1 înseamnă numărul ce se obține sporind cu 1 toate cifrele lui a, iar b^1 înseamnă numărul ce se obține micșorând cu 1 toate cifrele lui b.*

COL. GH. BUICLIU

Fie n numărul cifrelor lui a și b. Vom rezolva problema urmărind de aproape soluția problemei 2950 propusă de D-l *Col. Gh. Buiciu* și rezolvată în *Gazeta Matematică*, vol. XXX, pagina 222.

Deosebim 3 cazuri.

1. *a_1, b^1 este rădăcina patrată a lui $\overline{ab}$ cu aproximație în minus.*

Observând că:

$$a_1 = a + 1_n \quad ; \quad b_1 = b - 1_n$$

în care 1_n este numărul $111..1$ în care cifra 1 este scrisă de n ori. Cazul 1. conduce la:

$$(1) \qquad \overline{ab} + 1_n 0_n - 1_n < 10^n \sqrt{\overline{ab}} < \overline{ab} + 1_n 0_{n-1} 1 - 1_n .$$

2. *a_1, b^1 este rădăcina pătrată a lui $\overline{ab}$ cu aproximație în plus.*

In acest caz avem:

$$(2) \qquad \overline{ab} + 1_n 0_n - 1_{n-1} 2 < 10^n \sqrt{\overline{ab}} < \overline{ab} + 1_n 0_n - 1_n .$$

3. *a_1, b^1 este rădăcina patrată exactă a lui $\overline{ab}$.*

In acest caz trebuie să avem:

$$(3) \qquad 10^n \sqrt{\overline{ab}} = \overline{ab} + 1_n 0_n - 1_n .$$

Cazurile 1. și 2. se pot studia simultan căci limita inferioară a neegalităților (1) fiind aceiași cu limita superioară a neegalităților (3), putem scrie:

$$(4) \qquad \overline{ab} + 1_n 0_n - 1_{n-1} 2 < 10^n \sqrt{\overline{ab}} < \overline{ab} + 1_n 0_{n-1} 1 - 1_n .$$

Din (4) se deduce:

$$(5) \qquad \overline{ab} + 1_n 0_n - 1_{n-1} 2 < 10^n \sqrt{\overline{ab}}$$

$$(6) \qquad 10^n \sqrt{\overline{ab}} < \overline{ab} + 1_n 0_{n-1} 1 - 1_n ,$$

care conduc respectiv la neegalitățile:

$$(7) \qquad \overline{ab}^2 + (2_n 0_n - 2_{n-1} 4 - 10^{2n}) \overline{ab} + (1_n 0_n - 1_{n-1} 2)^2 < 0$$

$$(8) \qquad 0 < \overline{ab}^2 + (2_n 0_{n-1} 2 - 2_n - 10^{2n}) \overline{ab} + (1_n 0_{n-1} 1 - 1_n)^2$$

Considerând în (7) și (8) trinoamele în $\overline{ab}$, se știe că acele neegalități au loc, când pentru (7) avem:

$$(9) \qquad A < \overline{ab} < B ,$$

în care:

$$A = \frac{10^{2n} + 2_{n-1} 4 + 2_n 0_n - 10^n \sqrt{10^{2n} + 4_{n-1} 8 - 4_n 0_n}}{2}$$

$$B = \frac{10^{2n} + 2_{n-1} 4 - 2_n 0_n + 10^n \sqrt{10^{2n} + 4_{n-1} 8 - 4_n 0_n}}{2}$$

și când pentru (8) avem:

$$(10) \qquad \overline{ab} < C \quad \text{sau} \quad D < \overline{ab} ,$$

în care:

$$C = \frac{10^{2n} + 2_n - 2_n 0_{n-1} 2 - 10^n \sqrt{10^{2n} + 4_n - 4_n 0_{n-1} 4}}{2}$$

$$D = \frac{10^{2n} + 2_n - 2_n 0_{n-1} 2 + 10^n \sqrt{10^{2n} + 4_n - 4_n 0_{n-1} 4}}{2}$$

Comparând între ele numerele A, B, C, D se găsește cu ușurință că ori care ar fi n avem:

$$(11) \qquad A < C < D < B$$

și cum (9) și (10) dau limitele valorilor lui $\overline{ab}$ care satisfac neegalitățile (4), deci în cazurile 1. și 2. ale problemei, urmează că, ținând seamă de (11), pentru cazurile 1. și 2. $\overline{ab}$ trebuie să satisfacă condițiile:

$$(12) \qquad A < \overline{ab} < C$$

sau:

$$(13) \qquad D < \overline{ab} < B .$$

Soluțiile problemei, pentru cazurile 1. și 2. sunt deci date de neegalitățile (12) și (13) în care A, B, C, D au valorile notate mai sus.

Dând lui n diferite valori, se găsesc diferite valori pentru $\overline{ab}$.

Se elimină numerile terminate cu zero, care evi-

dent că nu sunt soluţii căci 0 nu se mai poate micşora aritmeticeşte.

Cazul 3. se studiază rezolvind ecuaţia (3) pe care o scrim sub forma:

$$(14)\quad a\,b^2 + 2_n 0_n - 10^{2n})\,a\,b + (1_n 0_n - 1_n)^2 = 0$$

$$a\,b = \frac{10^{2n} + 2_n - 2_n 0_n \pm 10^n \sqrt{10^{2n} + 4_n - 4_n 0_n}}{2}$$

Este evident că numărătorul se divide cu 2, deci ca ecuaţia (14) să aibă soluţii întregi în $a\,b$ este necesar şi suficient ca:

$$10^{2n} + 4_n - 4_n 0_n$$

să fie patrat perfect. Ori:

$$10^{2n} + 4_n - 4_n 0_n = 55\ldots5_{n-1}6\ 44\ldots\ 44_n$$

şi se poate demonstra că un număr terminat cu 4444 nu este patrat perfect. Pentru aceasta se poate consulta şi nota matematică de la pagina 134, vol. XXXV *Gazeta Matematică* întitulată *„Ultimele 4 cifre ale unui patrat perfect"*.

Deci $10^{2n} + 4_n - 4_n 0_n$ ar putea fi patrat perfect numai pentru $n = 1$, 2 sau 3. Se găseşte însă că numai pentru $n = 1$ avem:

$$10^{2n} + 4_n - 4_n 0_n = 64 = 8^2$$

ceiace dă soluţia:

$$a\,b = 81 \qquad \sqrt{81} = 9,0.$$

Exemple de soluţii. Pentru $n = 1$. Calculând pe A, B, C, D neegalitaţile (12) conduc la:

$$0,80 < a\,b < 1,30$$

care nu dă soluţie, căci singurul număr întreg dat de aceste neegalităţi este 1, care nu satisface condiţiile problemei.

Neegalităţile (13) conduc la:

$$78,70 < a\,b < 83,20,$$

care dau soluţiile 79, 81, 82, 83. In adevăr:

$$\underline{8,8} < \sqrt{79} < 8,9 \quad ; \quad \sqrt{81} = \underline{9,0}$$

$$9,0 < \sqrt{82} < \underline{9,1} \quad ; \quad 9,1 < \sqrt{83} < \underline{9,2}$$

Pentru $n = 2$ găsim soluţiunile:

$$\underline{87,54} < \sqrt{7665} < 87,55 \ ;$$

$$\underline{87,55} < \sqrt{7666} < 87,56 \ ;$$

$$\underline{87,56} < \sqrt{7667} < 87,57 \ ;$$

$$87,56 < \sqrt{7668} < \underline{87,57} \ ;$$

$$87,57 < \sqrt{7669} < \underline{87,58}$$

Problema are un număr nedeterminat de soluţii. Pentru $n > 3$ soluţiile se găsesc prin multe calcule aritmetice.

Au rezolvat complect problema d-nii: *M. Margulius* (Lic. Sp.-Haret, Bucureşti), urmând calea dată de d-l *Col. Gh. Buicliu* în problema d-sale 2950 din *Gazeta Matematică*, Vol. XXX, pag. 222 şi d-l *N. N. Mihăileanu* (Constanţa) urmând calea dată de d-l *Col. Gh. Buicliu* în problema d-sale 1766 din *Gazeta Matematică*, Vol. XXVIII, pag. 213.

D-l *N. N. Mihăileanu* a dat şi toate soluţiile numerice pentru $n = 2$.

Au dat numai soluţia 81, d-nii: *Ivănescu C.* (Bârlad), *Motoc D. M* (Oltenita), *Popa Gh. I.* (Bucureşti) şi *Trică S. I* (Constanţa).

Problema 989 face parte din o serie de probleme analoage din care am propus şi rezolvat o parte in *Gazeta Matematică*.

Pentru a pune în curent pe corespondenţii de azi cu rezultatele obţinute la acele probleme şi pentru a le da îndrumări pentru alte probleme analoage, care se vor propune ulterior îi informez că vor găsi în *Gazeta Matematică*, Vol. XVII, pag. 61 problema 1492 în care ceream ca $\sqrt{a\,b}$ să fie numărul zecimal a, b. Soluţiile sunt:

$$10^{2n} - 2 \ ; \quad 10^{2n} - 1 \ ; \quad 10^{2n} \ ; \quad 10^{2n} + 1.$$

Vol. XXVIII, pag. 213, problema 1766 în care ceream ca $\sqrt{a\,b}$ să fie numărul zecimal a_1, b_1 unde a_1 şi b_1 se obţin sporind cifrele lui a şi b cu 1. Soluţiile sunt date de:

$$38\ldots88_{2n-1} + 10^n \sqrt{138\ldots8_{2n-2}} < a\,b < 38\ldots88_{2n-3}90 + 10^n \sqrt{138\ldots88_{2n-4}90}$$

Vol. XXX, pag. 222, problema 2950 unde ceream ca $\sqrt{a\,b}$ să fie a_2, b_2 în care a_2 şi b_2 se obţin din a şi b sporindu-le toate cifrele cu 2. Rezultatul:

$$27_{2n-2}9 - 10^n \sqrt{27_{2n-3}9} < a\,b < 27_{2n-1} - 10^n \sqrt{27_{2n-2}}$$

$$27_{2n-1} + 10^n \sqrt{27_{2n-2}} < a\,b < 27_{2n-2}9 + 10^n \sqrt{27_{2n-3}9}$$

Vol. XXXIII, pag. 305, problema 3452 unde ceream ca $\sqrt{a\,b}$ să fie dublul sau triplul numărului zecimal a, b. Rezultatul, pentru diferitele cazuri:

$a = 2$	;	$b = 5$
$a = 2500\ldots0_{n-2}$	;	$b = 000\ldots0_n$
$a = 2499\ldots9_{n-2}$	;	$b = 999\ldots9_n$
$a = 11\ldots1_n$	;	$b = 11\ldots1_n$

GH. B.

1081*) *Să se facă raţional numitorul fracţiei:*

$$\frac{1}{\sqrt[m]{x^p} \pm \sqrt[n]{y^q}},$$

m, n, p, q fiind întregi pozitivi.

ION MARGINEANU

Fracţia dată se mai poate scri:

$$(1)\quad \frac{1}{\sqrt[m]{x^p} \pm \sqrt[n]{y^q}} = \frac{1}{\sqrt[mn]{x^{np}} \pm \sqrt[mn]{y^{mq}}} = \frac{1}{A \pm B},$$

unde am notat:

$$(2)\quad mn = r, \quad \sqrt[r]{x^{np}} = A, \quad \sqrt[r]{y^{mq}} = B.$$

Dacă avem acum în vedere identităţile cunoscute:

$$A^r - B^r = (A-B)(A^{r-1} + A^{r-2}B + \ldots + B^{r-1})$$

$$(3)\quad A^r + (-1)^{r-1}B^r = (A+B)[A^{r-1} - A^{r-2}B + \ldots + (-1)^{r-1}B^{r-1}],$$

putem scri evident:

$$(4)\quad \frac{1}{A+B} = \frac{A^{r-1} - A^{r-2}B + \ldots + (-1)^{r-1}B^{r-1}}{(A+B)[A^{r-1} - A^{r-2}B + \ldots + (-1)^{r-1}B^{r-1}]} = \frac{A^{r-1} - A^{r-2}B + \ldots + (-1)^{r-1}B^{r-1}}{A^r + (-1)^r B^r}$$

$$(5)\quad \frac{1}{A-B} = \frac{A^{r-1} + A^{r-2}B + \ldots + B^{r-1}}{(A-B)(A^{r-1} + A^{r-2}B + \ldots + B^{r-1})} = \frac{A^{r-1} + A^{r-2}B + \ldots + B^{r-1}}{A^r - B^r}$$

Înlocuind pe A, B şi r cu valorile din (2), având în vedere relaţia (1) şi observând că:

$$A^r = x^{mp}, \quad B^r = y^{nq},$$

relaţiile (4) şi (5) se mai pot scri:

$$\frac{1}{\sqrt[m]{x^p} + \sqrt[n]{y^q}} = \frac{\sqrt[mn]{x^{np(mn-1)}} - \sqrt[mn]{x^{np(mn-2)}y^{mq}} + \ldots + (-1)^{mn-1}\sqrt[mn]{y^{mq(mn-1)}}}{x^{np} + (-1)^{mn-1}y^{mq}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[m]{x^p} - \sqrt[n]{y^q}} = \frac{\sqrt[mn]{x^{np(mn-1)}} + \sqrt[mn]{x^{np(mn-2)}y^{mq}} + \ldots + \sqrt[mn]{y^{nq(mn-1)}}}{x^{np} - y^{mq}}$$

Acestea sunt relaţiunile care transformă fracţia dată, în fracţii echivalente cu ea, însă cu numitorul raţional.

Soluţii date de d-nii: *Cojocaru Marin* (lic. Milit., Craiova), *Patraulea N. R.* (lic. Milit., Tg-Mures), *Predoescu Traian* (lic. Milit., Craiova) şi *Vasiliu-Leoben Gheorghe* (Inginer)

Soluţii parţiale date de d-nii: *Băleanu Dumitru* (lic. M-rea Dealu), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Curchi Ioan* (student, Bucureşti), *Dan T. Traian* (Şc. Polit., Timişoara), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Mazilu Panaite* (lic. Internat, Iaşi), *Motoc D. Mircea* (Olteniţa), *Popa Gh. Ioan* (Olteniţa), *Preda C. C-tin* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Stan Mitruş* (T-Măgurele), *Ştefănescu Gh. Anibal*, (Bucureşti) şi *Ţarălungă Dumitru* (lic. Milit., Tg-Mureş).

*) Enunţ complectat.

1098. — *Se dă triunghiul echilateral* ABC *şi cercul său circumscris* O. *Fie* M *un punct oarecare luat pe latura* AC *a triunghiului şi* N *punctul unde* BM *tae cercul.*

Să se demonstreze că raportul:

$$\frac{\overline{AM}\cdot\overline{AN}\cdot\overline{NC} + \overline{AM}\cdot\overline{NC}^2}{\overline{BN}\cdot\overline{MN}},$$

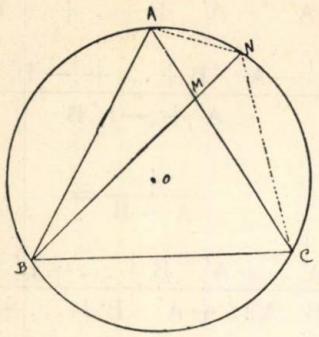
este constant.

C-TIN P. LATEA

Insemnând cu E expresia dată, putem scri:

$$(1)\quad E = \frac{\overline{AM}\cdot\overline{NC}\,(\overline{AN}+\overline{NC})}{\overline{BN}\cdot\overline{MN}}$$

Unind N cu A şi C avem patrulaterul înscriptibil A B C N, căruia aplicându-i teorema lui *Ptolomeu*, obţinem:



$$(2) \qquad \overline{AC}\cdot\overline{BN}=\overline{BC}\cdot\overline{AN}+\overline{AB}\cdot\overline{NC}$$

Triunghiul A B C fiind echilateral, avem:

$$\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{AB},$$

astfel că relaţia (2) se simplifică şi găsim:

$$\overline{BN}=\overline{AN}+\overline{NC}.$$

In virtutea acestei relaţii, egalitatea (1) devine:

$$(3) \qquad E=\frac{\overline{AM}\cdot\overline{NC}\cdot\overline{BN}}{\overline{BN}\cdot\overline{MN}}=\overline{AM}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{MN}}$$

Din asemănarea triunghiurilor A B M şi N C M, avem însă:

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{MN}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}},$$

astfel că (3) devine:

$$E=\overline{AM}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}}=\overline{AB}.$$

Raportul considerat e prin urmare constant, ca fiind egal cu o latură triunghiului echilateral dat, A B C.

Soluţii date de d-şoara: *Naneş Cornelia* (Şc. Centrală, Bucureşti) şi de d-nii: *Băleanu D-tru* (Şc. Preg. de Ofiţeri), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Iaşi), *Chiriţă Mihail* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M. Marin* lic. Milit, Craiova), *Fofiu Cornelliu* (Şc. Polit., Timişoara), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Mehedinţi D. D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Motoc D. Mircea* (Oltenita), *Negrea A. Leonte-Mircea* (student, Bucureşti), *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit., Craiova), *Predoescu I. Marin* (lic. Buzeşti, Craiova), *Predoescu Traian* (lic. Milit., Craiova), *Racoteanu Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Stănescu Emil* (lic Milit., Craiova), *Süti Mihai* (Şc. Polit., Timişoara), *Tica Petre Marin* şi *Trică S. Ion* (Constanţa).

1110. — *Să se arate că dacă în ecuaţia:*

$$\operatorname{tg}^n x+\operatorname{cot}^n x=0,$$

punem:

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{cot} x=y,$$

ecuaţia rezultată în y, are toate rădăcinele reale.

S-LT IOAN C. SAVIN

Ecuaţia dată se poate scri:

$$\operatorname{tg}^n x+\frac{1}{\operatorname{tg}^n x}=0,$$

sau:

$$\operatorname{tg}^{2n} x=-1=\cos(2k+1)\pi+i\sin(2k+1)\pi$$
$$=e^{i(2k+1)\pi}$$
$$(k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$$

De aci deducem:

$$\operatorname{tg} x=e^{\frac{i(2k+1)\pi}{2n}}, \qquad (k=0,1,2,\ldots,2n-1)$$

şi deci:

$$(1) \quad y=\operatorname{tg} x+\operatorname{cot} x=e^{\frac{i(2k+1)\pi}{2n}}+e^{\frac{-i(2k+1)\pi}{2n}}$$
$$=2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n},$$
$$(k=0,1,2,\ldots,(2n-1))$$

Rădăcinele ecuaţiei în *y*, care sunt date de relaţia (1), vedem că sunt astfel toate reale.

Soluţii date de d-nii: *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M. Marin* (lic. Milit., Craiova) şi *Margulius Marius* (Bucureşti).

D-nii: *Curchi Ioan* (student, Bucureşti), *Negrea A. Leonte-Mircea* (licenţiat în Matematici) şi *Popa Gh. Ioan*, au soluţionat problema, folosind teorema lui *Sturm*.

D-nii *Negrea A. Leonte-Mircea* şi *Margulius Marius*, observă că problema de mai sus se găseşte în (C. de P. Algebră, Cap. XLII exerc. 20) şi în *(Aubert & Papelier*, Exercices d'Algèbre et d'Analyse, pag. 302, exerc. 595) sub enunţul:

Dacă în ecuaţia:

$$z^n+\frac{1}{z^n}=0,$$

punem:

$$z+\frac{1}{z}=y,$$

ecuaţia rezultată în y are toate rădăcinele reale şi distincte.

1130. — *Să se demonstreze că expresiunea:*

$$27^{2p+1}+9^{p+1}+3^{4p+3}+1,$$

se divide prin 64, ori care or fi p întreg.

CEZAR IVANESCU

Expresiunea dată se poate scri:

$$(3^{2p+1})^3+3(3^{2p+1})^2+3(3^{2p+1})+1$$
$$=(3^{2p+1}+1)^3$$

Avem apoi:

$$64=4^3$$

E suficient deci să dovedim eă expresiunea:

$$3^{2p+1}+1,$$

este divizibilă prin 4.

Observăm însă că putem scri succesiv:

$3^{2p+1}+1=3.9^p+1=3$ (mult. $4+1)^p+1=$

3 (mult. $4+1)+1=$ mult. $4+3+1=$ mult. 4.

Expresiunea:

$$3^{2p+1}+1,$$

fiind astfel divizibilă prin 4, expresiunea dată este divizibilă prin 64.

Soluții date de d-nii: *Antonescu N.* (lic. Milit., Iași), *Blănaru Victor* (lic. Milit, Iași), *Borcea Clement* (lic. Milit, Iași), *Buhancă Ioan* (lic. Milit., Iași), *Cazanacli P.* (Iași), *Chiriac C-tin* (lic. Milit., Iași), *Căzănescu Gr. Eduard* (lic. Milit., Iași), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Lupascu A. Ernest* (lic. Milit., Iași), *Mehedinți D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Mereuță Emilian, Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Popa B. Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Popovici I. Ionel* (lic. Milit., Iași), *Preda C. C-tin* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Predoescu M. Traian* (lic. Milit., Craiova), *Procopiescu Mihai* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Schneller Corneliu* (lic. Milit., Iași), *Stănescu M. Emil* (lic. Milit., Craiova) și *Țarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureș).

Observări. 1. D-l *Cazanacli P.* dă încă o soluție prin metoda de recurență.

2°. S'au primit încă alte multe soluțiuni eronate.

1131. — *Să se rezolve sistemul de ecuație:*

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=\dfrac{a(1-b)-xy}{xy} \\ \dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=\dfrac{b(1-c)-yz}{yz} \\ \dfrac{c}{z}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{c(1-a)-xz}{xz} \end{cases}$$

ION MARGINEANU

Înmulțind ambii membrii ai ecuațiilor respectiv cu xy, yz, zx, obținem:

$$\begin{cases} xy+bx+ay=a(1-b) \\ yz+cy+bz=b(1-c) \\ zx+az+cx=c(1-a), \end{cases}$$

care se mai poate scri:

$$(1)\qquad \begin{cases} (x+a)(y+b)=a \\ (y+b)(z+c)=b \\ (z+c)(x+a)=c \end{cases}$$

Multiplicând aceste ecuații și în urmă extrăgând rădăcina patrată, obținem:

$$(x+a)(y+b)(z+c)=\pm\sqrt{abc}$$

Impărțind această ecuație pe rând cu ecuațiile sistemului (1), găsim:

$$\begin{cases} z+c=\pm\sqrt{\dfrac{bc}{a}} \\ z+a=\pm\sqrt{\dfrac{ac}{b}} \\ y+b=\pm\sqrt{\dfrac{ab}{c}} \end{cases}$$

De aci deducem următoarele sisteme de soluții:

$$\begin{cases} x=\pm\sqrt{\dfrac{ac}{b}}-a \\ y=\pm\sqrt{\dfrac{ab}{c}}-b \\ z=\pm\sqrt{\dfrac{bc}{a}}-c \end{cases}$$

Soluții date de d-nii: *Arbter Emil* (lic. Beiuș), *Bedron Iosif* (lic. Beiuș), *Boisnard Jean* (lic. Spiru-Haret, Bucu-

reşti), *Cazanacli P.* (Iaşi), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M.* (lic. Milit., Craiova), *Curchi Ioan* (student, Bucureşti), *Godeanu Ig. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Ivănescu Cezar* (bacalaureat, Bârlad), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Lupescu Gh. Corneliu* (lic. Roman), *Maşcaş Petru* (lic. Beiuş), *Mazilu Panaite* (lic. Internat, Iaşi). *Mereuţă Emilian, Nenciulescu H.* (Tg-Mureş), *Păunescu N* (lic Milit, Craiova), *Popa Nicolaie* (lic. Beiuş), *Popescu Adrian* (student), *Predoescu I. Marin* (lic. Buzeşti, Craiova), *Predoescu M.* (lic Milit., Craiova), *Stănescu M. Èmil* (lic. Milit, Craiova), *Stern Nicolaie* (lic. Milit., Craiova), *Stoica G. Ion* (Sub-Lt) şi *Trică Ioan* (Caransebeş).

PROBLEME PROPUSE

1209. — Să se găsească un număr de cinci cifre, patrat perfect şi de forma $\overline{a\,b\,a\,c\,a}$, unde $\overline{c\,b}$ este cub perfect, iar $\overline{c\,a}$ este prim.

CONSTANTIN BUDEANU

1210. — Să se determine polinomul de gradul al 3-lea $P(x)$, ştiind că:

$$P(a) - P(b) - P(c) = 2a$$
$$P(b) - P(c) - P(a) = 2b$$
$$P(c) - P(a) - P(b) = 2c$$

şi $a + b + c = 0$. Generalizare.

I. V. MATIES

1211. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2+1)(y^2+1)}{x+y} = a(xy+1) \\ \dfrac{(y^2+1)(z^2+1)}{y+z} = b(yz+1) \\ \dfrac{(z^2+1)(x^2+1)}{z+x} = c(zx+1) \end{cases}$$

ADRIAN POPESCU

1212. — Fie A' un punct pe latura BC a triunghiului ABC şi B' proecţia sa pe AC. Perpendicularele în A' şi B' pe BC şi AC se întâlnesc în C'. In ce caz C' se află pe AB?

Fie α, β, γ proecţiile centrului cercului înscris triunghiului ABC pe $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$.

Să se demonstreze că dacă C' se află pe AB, atunci trei din segmentele determinate de α, β, γ pe laturile triunghiului $A'B'C'$, sunt egale între ele.

COL. GH BUICLIU

1213. — Fie I şi O centrele cercurilor înscris şi circumscris triunghiului ABC, iar J simetricul lui I în raport cu O. Cele trei perpendiculare, ridicate în A, B, C pe cevienele respective ale punctului J, întâlnesc laturile corespunzătoare ale triunghiului format prin unirea punctelor de contact ale triunghiului ABC cu cercul înscris, în trei puncte situate pe axul radical al cercurilor înscris şi circumscris.

CONSTANTIN IONESCU BUJOR

1214. — Să se stabilească identitatea:

$$\frac{a_0\cos 3t + (a_1 - 2a_0)\cos 2t + (a_2 - 2a_1 + a_0)\cos t + (a_1 - a_2)}{2a_0\cos 2t + 2a_1\cos t + a_2} = -2\sin^2\frac{t}{2}$$

V. ALACI

1215. — Să se arate că în orice triunghiu, avem:

$$\sum \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\operatorname{cotg}\frac{B}{2} \geq 9$$

ION MARGINEANU

1216. — De unde trebuie suspendat un con drept, ca să aibă o generatoare orizontală.

IOAN C. SCHILERU-DILI

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**

Administration
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

LA REDACȚIA „REVISTEI MATEMATICE DIN TIMIȘOARA SE PRIMESC ABONAMENTE PENTRU ANUL AL V-LEA (MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)

DE BOLETIN MATEMATICO

COSTUL UNUI ABONAMENT FIIND DE 300 LEI ȘI PENTRU ANUL AL III-LEA (MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)

DE BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

COSTUL ABONAMENTULUI FIIND DE 125 LEI, PUBLICATE ÎN BUENOS AIRES; AMÂNDOUĂ 400 LEI

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Abonamentul pe anul XIII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL XIII. 15 AUGUST 1933 No. 6.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. N O. ZAHARIA: DOUA COMEMORARI: LEONARD EULER SI ADRIEN MARIE LEGENDRE.
2 CEZAR IVANESCU: ASUPRA UNOR INSUMARI.
3. ANECDOTE SI GLUME MATEMATICE.
4. NOTE MATEMATICE: 10, 11
5. BIBLIOGRAFIE.
6. PROBLEME REZOLVATE: 898 1076, 1127, 1128.
6. PROBLEME PROPUSE: 1217-1224
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Artegrafice „Tipografia Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adre sate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara“ este pentru anul XIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare

---

ANUL XIII — No 6 TIMISOARA, 15 AUGUST 1933

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie.

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

DOUĂ COMEMORĂRI: LEONARD EULER și ADRIEN-MARIE LEGENDRE

de N. O. ZAHARIA

I.

Anul acesta se împlinesc 150 de ani dela moartea matematicianului *Euler*. In tratatele de matematici i se întâlnește adescori numele alături de vreo teoremă al cărui autor este. Mai întâi, în geometria elementară, facem cunoștință cu cercul lui *Euler*; apoi, în trigonometrie (sau analiză, dacă vreți), relația dintre funcțiunile circulare directe și funcția exponențială.

Vom aminti aci, în puține cuvinte, care i-au fost viața, cariera și opera.

S'a născut în Bâle, la 15 Aprilie 1707, tatăl său fiind preot protestant în acel oraș. Studiile și le-a făcut sub directiva inteligentă a lui *Jean Bernoulli*. Faptul acesta i-a prilejuit o strânsă legătură de prietenie cu *Daniel* și *Nicolas*, fiii profesorului său. Mai târziu, *Daniel Bernoulli* părăsind catedra pe care o deținea la Universitatea din Petrograd, *Euler* îi ia locul. *Daniel Bernoulli* nu se putuse obișnui cu climatul excesiv de aspru al Rusiei și din această cauză a părăsit Petrogradul. Același climat, nepotrivit constituției sale fizice, a făcut ca *Euler* să se îmbolnăvească grav de ochi, pierzând chiar unul. In 1741 e chemat la Berlin, de către împăratul *Frederic cel Mare*. La catedra pe care el o ocupă aci, este chemat în 1766 matematicianul francez *Lagrange*, iar *Euler* se reîntoarce la Petrograd. Boala de ochi pe care o căpătase aci, îi revine din nou, iar după doi ani rămâne orb. Un accident important pentru opera sa științifică este arderea casei sale, în 1771. In urma acestui incendiu nu s'au putut salva decât puține din hârtiile sale. Mare parte din lucrările pe cari le avea în manuscris au ars; unele, *Euler* le-a refăcut; prea puține, însă, pe lângă numărul și însemnătatea celor ce-au pierit.

A murit de apoplexie la Petrograd, la 7 Septembrie 1783.

In 1748, *Euler* publică[1] „*Introductio in Analysin Infinitorum*". Cartea aceasta era menită să servească drept întroducere în matematicile pure. E împărțită în două părți: prima, conține chestiuni de algebră, teoria ecuațiilor și trigonometrie; cea de a doua, geometria analitică. In ce privește algebra, lucrările sale sunt mai ales din domeniul seriilor: desvoltarea în serie a diferitelor funcțiuni și însumarea seriilor; el arată explicit că o serie infinită nu poate fi întrebuințată în calcule decât dacă ea este convergentă. Trigonometria este privită de *Euler*, nu ca un instrument al astronomiei sau geometriei, ci ca o ramură a analizei. Arată că între funcțiunile circulare directe și funcția exponențială există o legătură, tradusă prin relația:

$$\cos x + i \sin x = e^{ix}$$

Numărul încomensurabil: 2,71828 .., baza logaritmilor neperieni a fost pentru prima oară însemnat cu litera *e*, -- așa cum se înseamnă și astăzi, — de către *Euler*, în 1731.

In ce privește chestiunile de geometrie analitică, *Euler* divide curbele în: algebrice și transcendente, — stabilind câteva proprietăți relative la curbele algebrice în general. In acest uvraj se găsesc date și formulele de transformare a coordonatelor în spațiu. Dă deasemenea, prima discuție complectă a curbelor cu dublă curbură.

In 1755 publică: „*Institutiones Calculi Differentialis*". A fost primul uvraj clasic de calcul

*) Datele sunt luate mai ales din: *W. W. Rouse Ball, Histoire des mathématiques.*

diferențial, servind de model multora din tratatele publicate în urmă. Intre 1768 și 1770 publică *Euler* cartea: „*Institutiones Calculi Integralis*“, unde au fost înserate cele mai vechi memorii ale sale asupra chestiunilor de calcul integral și asupra ecuațiunilor diferențiale. Aceste din urmă două cărți conțin tot ce se știa pânăla acea vreme în domeniul analizei matematice. Aci întroduse *Euler*, pentru prima oară în analiză, funcțiunile *beta* și *gama*, — folosindu-le la reducerea și transformarea integralelor.

Rezolvarea problemelor relative la curbele izoperimetre și geodezice, l-a condus pe *Euler* la construirea *calculului variațiilor*. Acest calcul, așa cum îl avem, este însă opera matematicianului francez *Lagrange*. Pe când acesta avea numai 19 ani, scrise o scrisoare lui *Euler* în care îi îndica acestuia soluția pe care el o dăduse problemei izoperimetrelor, care mai bine de jumătate de secol fusese obiectul a diverse cercetări. Cu această ocazie, *Lagrange* enunța principiile calculului variațiilor. Recunoscând generalitatea metodei și superioritatea ei asupra aceleia pe care el însuși o imaginase relativ la acest calcul. *Euler* își întrerupe lucrările sale, lăsându-l pe *Lagrange* să contlnue și, odată teoria complect terminată, publicarea ei să-i aducă tânărului matematician renumele ce i se cuvenea. *Euler* publică și el ideile generale asupra acestui calcul în „*Curvarum maximi minimeve proprietate gnadenţium inventio nove ac facilis*“ (în 1744). In 1770 publică „*Einleitung zur Algebra*“, în două volume. Primul volum conține chestiuni de algebră propriu zisă. Aci încearcă *Euler* să stabilescaă pe baze raționale, operațiunile fundamentale ale algebrei. Cel de al doilea volum e consacrat analizei nedeterminate.

Euler a mai scris și publicat memorii de matematici aplicate și fizică matematică. Stabilește ecuația generală a mișcării unui corp în jurul unui corp fix; iar în hidrodinamică, ecuațiile generale ale mișcării. In astronomie, a publicat trei volume despre planete și comete și despre lună. Obține un premiu al Academiei de Științe din Paris pentru o lucrare asupra *problemei celor trei corpuri*. Cercetările din domeniul opticei le publică în „*Dioptrica*“ (3 volume). *Euler* compune deasemenea un uvraj elementar de fizică și principiile fundamentale ale matematicilor.

După cum se vede din această sumară înșirare, opera lui *Leonard Euler* e imensă. Când, un comitet format din savanți recunoscuți, au proectat publicarea operelor complecte ale lui *Euler*, Societatea Română de Științe a instituit un comitet, în frunte cu d-l ing. *Ion Ionescu*, însărcinat cu strângerea prin subscripții a unei sume cu care să contribue la cheltuielile de imprimare.

Lumii științifice din Elveția îi revine sarcina comemorării împlinirii a 150 de ani dela moartea celui mare savant elvețian.

II.

In Ianuarie trecut, s'a implinit 100 de ani dela moartea unuia din marii matematiciani francezi, a cărui activitate științifică s'a scurs în ultimii 20 de ani ai secolului al XVIII-lea și primii 30 ai celui următor. Contemporan cu *Lagrange*, al cărui spirit original nu l--a avut, *Legendre* a adus totuși matematicilor servicii imense prin vastul material ce-l constitue operele sale, material ce a fost punct de plecare și reazem pentru câțiva din matematicianii iluștri ce i-au urmat: *Gauss, Abel, Jacobi.*

Viața sa a fost simplă și fără accidente. S'a născut la Toulouse, la 18 Septembrie 1752. Studiile și le-a făcut la *Colegiul Mazarin* din Paris. In 1777, *Legendre*, care era foarte timid, obținu, grație lui *D'Alembert*, catedra de matematici dela Școala militară din Paris, unde rămase până în 1780. A fost numit în mai multe rânduri în diferite comisii științifice. La 1795 a fost numit profesor la Școala Normală. Mai târziu, ocupă câteva funcțiuni guvernamentale, obscure. A murit la 10 Ianuarie 1833, la Paris.

Opera sa cea mai cunoscută, „*Elementele de Geometrie*“ (apărute în 1794), în scurt timp deveniseră clasice în toată Europa, unde înlocuiseră aproape cu totul *Elementele* lui *Euclide*. Uvrajul începe cu enunțarea principiilor generale ale geometriei definind, ca și *Euclide*, toate noțiunile fundamentale. Demonstrațiile sunt riguroase și se înlănțue în mod natural. In ultima ediție introduce și elementele trigonometriei. Tot aci se

mai găsesc şi demonstraţiile incomensurabilităţii lui π şi π^2. În ediţia din 1803 a apărut un apendice tratând despre chestiunea, atât de mult discutată, a paralelelor[1] în care *Legendre* încerca să-i dea o demonstraţie independentă de postulatul lui *Euclide*. Rezultatul la care parvine însă nu este complect, — reuşind să demonstreze numai că suma unghiurilor unui triunghiu nu poate să depăşească două unghiuri drepte. (Se ştie că postulatul lui *Euclide* duce la concluzia că această sumă este *egală* cu două unghiuri drepte). Totuşi, prin acest rezultat, *Legendre* poate fi considerat, alături de *Sacherri* (1667 — 1733) şi *Lambert* (1728—1777), drept precursor, al nouei geometrii neeuclidiane, ale cărei baze le-au pus: *Labatchevsky* (1793—1856) şi *Bolyai* (1802—1860).

În 1789, publică „*Teoria numerelor*" uvraj care a fost recditat în 1830, în două volume. Conţine tot ceeace fusese deacoperit până atunci în această ramură, cum şi numeroase contribuţii personale. Printre acestea, *legea reciprocităţii resturilor patratice* a fost pentru prima oară demonstrată în acest uvraj, — fiind însă enunţată într'un memoriu al său încă din 1785, Legea aceasta a entuziasmat între' atâta pe *Gauss*, încât l-a făcut s'o numească: giuvaerul aritmeticei. Mai târziu, prin analogie cu legea reciprocităţii quadratice, *Gauss* şi *Kummer* au demonstrat legile reciprocităţii cubice şi biquadratice. *Legendre* a mai dat şi metoda transformării — când aceasta este posibil — unei ecuaţii nedeterminate de gr. al II-lea, într'o ecuaţie de forma:

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 = 0 .$$

Dă deasemenea şi expresia cu care se poate calcula aproximativ numărul nùmerelor prime mai mici ca un număr n.

Opera cea mai importantă a lui *Legendre* este *Tratatul de funcţiuni eliptice*. Studiul întreprins de *Legendre* conţine multe rezultate importante. Înaintea sa, *Lagrange, D'Alembert, Euler,* observaseră existenţa unor expresiuni ce se puteau integra cu ajutorul arcelor de elipsă sau hiperbolă; caracterul comun al acestor expresiuni este radicalul unui polinom de gradul patru. *Legendre* a făcut o clasificare amănunţită a acestor întegrale numite *eliptice*. Expunerea modernă a subiectului se bazează însă pe lucrările lui *Abel* şi *Jacobi*.

Dintre celelalte lucrări, notele sale de geodezie (în număr de trei) au fost prezentate Academiei în anii 1787 şi 1788. Metoda celor mai mici patrate, pe care a găsit-o independent de *Gauss*, a fost expusă de *Legendre* în ale sale „*Nouvelles Méthodes* (1806).

*) Din nefericire nu am putut avea în mână decât o ediţie imprimată după moartea lui *Legendre*, din care discuţiile privitoare la postulatul lui *Euclide* lipseau. Lipsa aceasta de izvoare originale, face la noi aproape imposibilă cercetarea istorică rigoroasă.

ASUPRA UNOR ÎNSUMĂRI

de CEZAR IVANESCU

In rândurile ce urmează, îmi propun să indic o metodă cu ajutorul căreia se pot însuma diferite expresiuni trigonometrice şi care ne conduce în acelaş timp şi la remarcabile desvoltări în serie. Voiu porni pentru aceasta dela indentităţi şi serii cunoscute. Exemplele ce urmează vor arăta atât metoda cât şi modul cum trebuiesc mânuite calculele.

I. Să considerăm identitatea cunoscută:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

şi următoarele două sume ataşate ei:

$$S_1 = 1 + x\cos\varphi + x^2\cos 2\varphi + \ldots + x^n \cos n\varphi$$

$$S_2 = \quad x\sin\varphi + x^2 \sin 2\varphi + \ldots + x^n \sin n\varphi$$

In exemplele ce voiu trata presupun pentru simplicitate:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq +\frac{\pi}{2} .$$

Inmulţind ambii membri din relaţia a 2-a cu $i = \sqrt{-1}$ şi adunând apoi cu prima avem:

$$S_1 + iS_2 = 1 + x(\cos\varphi + i\sin\varphi) +$$

$$x^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \ldots + x^n(\cos n\varphi + i\sin n\pi)$$

Ţinând seamă de formulele lui *Euler* şi *Moivre:*

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$$

$$\cos n\varphi + i\sin n\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n$$

putem scri:

$$S_1 + i S_2 = 1 + x e^{i\varphi} + x^2 e^{2i\varphi} + \ldots$$

$$\ldots + x^n e^{ni\varphi} = \frac{x^{n+1} e^{(n+1)i\varphi} - 1}{x e^{i\varphi} - 1}$$

$$^{*}_{*}{}^{*} \quad (x e^{i\varphi} - 1)(S_1 + i S_2) = x^{n+1} e^{(n+1)i\varphi} - 1$$

Sau:

$$[x(\cos\varphi + i \sin\varphi) - 1](S_1 + i S_2) =$$

$$x^{n+1}[\cos(n+1)\varphi + i \sin(n+1)\varphi] - 1$$

Efectuând înmulțirile și egalând părțile reale din ambii membri, apoi cele imaginare se capătă:

$$S_1(x\cos\varphi - 1) - S_2 x \sin\varphi = x^{n+1}\cos(n+1)\varphi - 1$$

$$S_1 x \sin\varphi + S_2(x\cos\varphi - 1) = x^{n+1}\sin(n+1)\varphi$$

Rezolvind acest sistem în raport cu S_1 și S_2 găsim:

$$(1)\quad S_1 = \frac{x^{n+1}[x\cos n\varphi - \cos(n+1)\varphi] - x\cos\varphi + 1}{x^2 - 2x\cos\varphi + 1}$$

$$(2)\quad S_2 = \frac{x^{n+1}[x\sin n\varphi - \sin(n+1)\varphi] + x\sin\varphi}{x^2 - 2x\cos\varphi + 1}$$

Am obținut astfel sumele ce ne-am propus să calculăm.

Dacă $|x| < 1$ și $n = \infty$ atunci x^{n+1} tinde către zero.

Avem deci, în acest caz următoarele desvoltări în serie:

$$(3)\quad \frac{1 - x\cos\varphi}{x^2 - 2x\cos\varphi + 1} = 1 + x\cos\varphi + x^2\cos 2\varphi + \ldots$$

$$\ldots + x^n \cos n\varphi + \ldots$$

$$(4)\quad \frac{x\sin\varphi}{x^2 - 2x\cos\varphi + 1} = x\sin\varphi + x^2\sin 2\varphi + \ldots$$

$$\ldots + x^n \sin n\varphi + \ldots$$

Schimbând pe x în $\frac{1}{x}$ obținem:

$$(5)\quad \frac{x(x - \cos\varphi)}{x^2 - 2x\cos\varphi + 1} = 1 + \frac{\cos\varphi}{x} + \frac{\cos 2\varphi}{x^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\cos n\varphi}{x^n} + \ldots$$

$$(6)\quad \frac{x\sin\varphi}{x^2 - 2x\cos\varphi + 1} = \frac{\sin\varphi}{x} + \frac{\sin 2\varphi}{x^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\sin n\varphi}{x^n} + \ldots$$

desvoltări valabile pentru $|x| > 1$.

II. Fie desvoltarea cunoscută:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

și:

$$S_1 = 1 + \frac{x\cos\varphi}{1} + \frac{x^2\cos 2\varphi}{2!} + \ldots + \frac{x^n\cos n\varphi}{n!} + \ldots$$

$$S_2 = \frac{x\sin\varphi}{1} + \frac{x^2\sin 2\varphi}{2!} + \ldots + \frac{x^n\sin n\varphi}{n!} + \ldots$$

Procedând ca și pentru exemplul I. avem:

$$S_1 + i S_2 = 1 + \frac{x e^{i\varphi}}{1} + \frac{x^2 e^{2i\varphi}}{2!} + \ldots + \frac{x^n e^{ni\varphi}}{n!} + \ldots$$

Sau:

$$S_1 + i S_2 = e^{x e^{i\varphi}} = e^{x(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = e^{x\cos\varphi} e^{i x\sin\varphi} =$$

$$e^{x\cos\varphi}[\cos(x\sin\varphi) + i\sin(x\sin\varphi)]$$

De aci rezultă:

$$(7)\quad S_1 = e^{x\cos\varphi}\cos(x\sin\varphi)$$

$$(8)\quad S_3 = e^{x\cos\varphi}\sin(x\sin\varphi)$$

Am obținut astfel două desvoltări în serie, interesante.

Dacă în (7) și (8) facem $\varphi = \frac{\pi}{2}$, obținem desvoltările cunoscute ale lui $\cos x$ și $\sin x$:

$$(9)\quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$(10)\quad \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

III. Să considerăm desvoltarea:

$$L(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

valabilă pentru $|x| \leq 1$ și sumele corespunzătoare ei:

$$S_1 = \frac{x\cos\varphi}{1} - \frac{x^2\cos 2\varphi}{2} + \frac{x^3\cos 3\varphi}{3} - \ldots$$

$$S_2 = \frac{x\sin\varphi}{1} - \frac{x^2\sin 2\varphi}{2} + \frac{x^3\sin 3\varphi}{3} - \ldots$$

Urmând aceiaşi cale avem:

$$S_1 + iS_2 = \frac{x\,e^{i\varphi}}{1} - \frac{x^2\,e^{2i\varphi}}{2} + \frac{x^3\,e^{3i\varphi}}{3} - \dots$$

sau:

$$S_1 + iS_2 = \lambda\,(1 + x\,e^{i\varphi})$$

Să determinăm pe S_1 şi S_2. Avem:

$$1 + x\,e^{i\varphi} = e^{S_1 + iS_2} = e^{S_1}.\,e^{iS_2} = e^{S_1}(\cos S_2 + i \sin S_2)$$

sau:

$$1 + x\,(\cos\varphi + i \sin\varphi) = e^{S_1}\cos S_2 + i\,e^{S_1}\sin S_2$$

De aci rezultă:

$$1 + x\cos\varphi = e^{S_1}\cos S_2 \quad , \quad x\sin\varphi = e^{S_1}\sin S_2$$

Impărţind aceste relaţii, avem:

$$\operatorname{tg} S_2 = \frac{x\sin\varphi}{1 + x\cos\varphi} \quad ^{*}_{*}{}^{*} \quad S_2 = \operatorname{arctg}\frac{x\sin\varphi}{1 + x\cos\varphi}$$

Aceleaşi relaţii ridicate la patrat şi apoi adunate ne dau:

$$^{*}_{*}{}^{*} \qquad 1 + 2x\cos\varphi + x^2 = e^{2S_1}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\,L\,(1 + 2x\cos\varphi + x^2)$$

Pornind deci dela desvoltarea cunoscută a lui $L\,(1 + x)$, am ajuns la următoarele desvoltări în serie remarcabile:

(11) $$\frac{1}{2}\,L\,(1 + 2x\cos\varphi + x^2) =$$

$$x\cos\varphi - \frac{x^2\cos 2\varphi}{2} + \frac{x^3\cos 3\varphi}{3} - \dots$$

(12) $$\operatorname{arctg}\frac{x\sin\varphi}{1 + x\cos\varphi} =$$

$$x\sin\varphi - \frac{x^2\sin 2\varphi}{2} + \frac{x^3\sin 3\varphi}{3} - \dots$$

Dacă în (11) facem $\varphi = 0$, găsim desvoltarea lui $L\,(1 + x)$ dela care am plecat, iar dacă facem $x=1$ avem, ţinând seama că:

$$1 + 2x\cos\varphi + x^2 = 2\,(1 + \cos\varphi) = \left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2$$

(13) $$L\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right) = \cos\varphi -$$

$$\frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos 3\varphi}{3} - \dots$$

Schimbând în (11) pe x în $-x$, avem:

(14) $$\frac{1}{2}\,L\,(1 - 2x\cos\varphi + x^2) =$$

$$-x\cos\varphi - \frac{x^2\cos 2\varphi}{2} - \frac{x^3\cos 3\varphi}{3} - \dots$$

unde făcând $x = 1$, rezultă:

(15) $$L\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right) =$$

$$-\cos\varphi - \frac{\cos 2\varphi}{2} - \frac{\cos 3\varphi}{3} - \dots$$

Scăzând desvoltările (11) şi (14), membru cu membru, avem:

(16) $$\frac{1}{4}\,L\,\frac{1 + 2x\cos\varphi + x^2}{1 - 2x\cos\varphi + x^2} =$$

$$x\cos\varphi + \frac{x^3\cos 3\varphi}{3} + \frac{x^5\cos 5\varphi}{5} + \dots$$

unde făcând $x = 1$, rezultă:

(17) $$\frac{1}{2}\,L\left(\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\right) = \cos\varphi +$$

$$\frac{\cos 3\varphi}{3} + \frac{\cos 5\varphi}{5} + \dots$$

Dacă în desvoltarea (12) particularizăm pe φ sau x obţinem deasemenea rezultate interesante.

Astfel făcând $\varphi = \frac{\pi}{2}$, avem desvoltare cunoscută a lui arctg x:

(18) $$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Deasemeni făcând $x = 1$ şi ţinând sesma că:

$$\frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

avem:

(19) $$\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\varphi}{2} =$$

$$\sin\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \dots$$

Dacă în (12) schimbăm pe x în $-x$ şi pe φ în $-\varphi$, avem:

(20) $$\operatorname{arctg}\frac{x\sin\varphi}{1-x\cos\varphi}=$$

$$x\sin\varphi+\frac{x^2\sin 2\varphi}{2}+\frac{x^3\sin 3\varphi}{3}+\dots$$

Adunând (12) cu (20) şi ţinând seamă de relaţia cunoscută:

$$\operatorname{arctg} a+\operatorname{arctg} b=\operatorname{arctg}\frac{a+b}{1-ab},$$

avem:

(21) $$\operatorname{arctg}\frac{2x\sin\varphi}{1-x^2}=$$

$$(2x\sin\varphi+\frac{x^3\sin 3\varphi}{3}+\frac{x^5\sin 5\varphi}{5}+\dots)$$

Dacă în (21) facem $x=1$ şi presupunem $\varphi\neq 0$, membrul întâiu devine:

$$\operatorname{arctg}\infty=\frac{\pi}{2}$$

Impărţind deci ambii membri cu 2, avem formula remarcabilă, de altfel cunoscută:

(22) $$\frac{\pi}{4}=\sin\varphi+\frac{\sin 3\varphi}{5}+\frac{\sin 5\varphi}{5}+\dots$$

Dacă aci facem $\varphi=\frac{\pi}{2}$, avem:

(23) $$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots$$

rezultat ce se putea obţine şi din (18) făcând $x=1$ sau din (19) făcând $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Am putea considera încă alte identităţi sau desvoltări în serie, cărora aplicându-le această metodă, am obţine însumări remarcabile. Deasemenea am putea deriva parte din rezultatele obţinute în raport cu φ sau x.

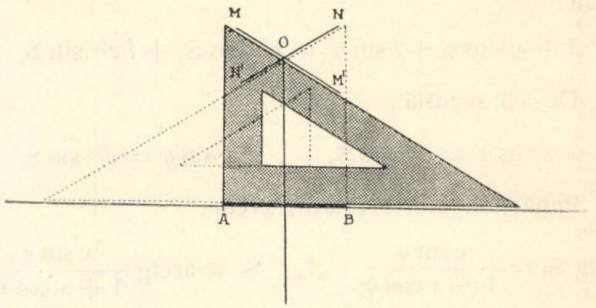
Exemplele tratate evidenţiază însă îndeajuns uşurinţa cu care căpătăm prin această metodă rezultatele, cât şi importanţa acestora. Ţin încă să amintesc că unele din desvoltările în serie pe care le-am obţinut se pot stabili şi pe cale directă cu ajutorul formulei lui *Mac-Laurin*.

NOTE MATEMATICE

10. — *Construcţie grafică.*

Metodă practică pentru a ridica perpendiculara pe mijlocul unui segment dat, numai cu echerul.

Următoarea construcţie ne permite ridicarea perpendicularei pe mijlocul unui segment într'un mod rapid:



Asezăm echerul cu o latură a unghiului drept pe segmentul dat A B, cu vârful unghiului drept în A. Ducem pe lângă latura opusă unghiul drept o dreaptă M M'. Schimbăm echerul cu unghiul drept în B şi printr'o construcţie analoagă căpătăm dreapta N N'. Intersecţie celor două drepte, O, este punctul de unde scoborând o perpendiculară, am rezolvit problema.

Pe figură se veda uşor constucţia

CONSTANTIN BUDEANU

11. — *Asupra identităţilor lui Simpson.*

D-l *Col. Gh. Buiclíu* spune, în *Revista Matematică* din *Timişoara an. XIII, No. 1,* în Nota 1, că matematicianul *Tomas Simpson* (1710—1761) a avut predilecţie mai mult pentru chestiunile de trigonometrie, unde se întâlnesc formulele:

$$\sin(m+1)x=2\cos x\sin mx-\sin(m-1)x$$

$$\cos(m+1)x=2\cos x\cos mx-\cos(m-1)x,$$

cari poartă numele de formulele lui *Simpson*.

In legătură cu această notă, voiesc, în cele ce urmează, să generalizez aceste identităţi şi ca aplicaţii să însumez unele sume trigonometrice.

Voi considera identitatea evidentă:

$$\sin(m+n)x=\sin[(m+n-1)+1]x$$

$$^{*}_{*}{}^{*}\quad \sin(m+n)x=\sin(m+n-1)x\cos x+$$

$$\sin x \cos(m+n-1)x$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad \sin(m+n)x = 2\cos x \sin(m+n-1)x -$$

$$[\cos x \sin(m+n-1)x - \sin x \cos(m+n-1)x]$$

$$(1) \quad \overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad \sin(m+n)x = 2\cos x \sin(m+n-1)x -$$

$$\sin(m+n-2)x.$$

Fac în (1) $n = 0, 1, 2, \ldots, n$ şi obţin:

$$\sin mx = 2\cos x \sin(m-1)x - \sin(m-2)x$$

$$\sin(m+1)x = 2\cos x \sin mx - \sin(m-1)x$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\sin(m+n)x = 2\cos x \sin(m+n-1)x -$$

$$\sin(m+n-2)x.$$

Adnnând, obţin:

$$(2) \quad \sum_{i=0}^{n} \sin(m+i)x = 2\cos x \sum_{i=-1}^{n-1} \sin(m+i)x -$$

$$\sum_{i=-2}^{n-2} \sin(m+i)x$$

In mod mod analog, plecând dela:

$$\cos(m+n)x = \cos[(m+n-1)-1]x$$

ajung la:

$$(3) \quad \cos(m+n)x = 2\cos x \cos(m+n-1)x -$$

$$\cos(m+n-2)x,$$

şi în fine la:

$$(4) \quad \sum_{i=0}^{n} \cos(m+i)x = 2\cos x \sum_{i=-1}^{n-1} \cos(m+i)x -$$

$$\sum_{i=-2}^{n-2} \cos(m+i)x.$$

Dacă în identităţile (1) şi (3) pun $n = 1$, obţin identităţile lui *Simpson*. Din identităţile (1) şi (3) s'au obţinut identităţile (2) şi (4) şi pe cari le consider identităţi *Simpson* generalizate.

Aplicaţii. Transformarea sumelor trigonometrice:

$$\sum_{i=0}^{n} \sin(m+i)x \quad \text{şi} \quad \sum_{i=0}^{n} \cos(m+i)x$$

în produse.

Fie:

$$(5) \qquad S = \sum_{i=0}^{n} \sin(m+i)x$$

şi obţin pentru:

$$(6) \quad \begin{cases} \sum_{i=-1}^{n-1} \sin(m+i)x = S + \sin(m-1)x - \sin(m+n)x \\ \sum_{i=-2}^{n-2} \sin(m+i)x = S + \sin(m-2)x + \sin(m-1)x - \\ \qquad \sin(m+n-1)x - \sin(m+n)x \end{cases}$$

Ţinând seamă de (5) şi (6), obţin din (2)

$$S = 2\cos x[S + \sin(m-1)x - \sin(m+n)x] -$$

$$S - \sin(m-2)x - \sin(m-1)x +$$

$$\sin(m+n-1)x + \sin(m+n)x$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad 2S(1-\cos x) = \sin mx + \sin(m-2)x -$$

$$\sin(m+n+1)x - \sin(m+n-1)x - \sin(m-2)x -$$

$$\sin(m-1)x + \sin(m+n-1)x + \sin(m+n)x.$$

Fac reducerile şi unele calcule şi obţin:

$$4S\sin^2\frac{x}{2} = \sin mx - \sin(m-1)x -$$

$$[\sin(m+n+1)x - \sin(m+n)x]$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad 4S\sin^2\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{2m-1}{2}x -$$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{2m+2n+1}{2}x$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad 2S\sin\frac{x}{2} = \cos\frac{2m-1}{2}x - \cos\frac{2m+2n+1}{2}x$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad S = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{2m+n}{2}$$

In mod analog din (4) se obţine:

$$\sum_{i=0}^{n} \cos(m+i)x = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{2m+n}{2}x.$$

Aceste însumări, cunoscute deja, se pot însuma şi prin alte metode, dar de remarcat este că metoda dată mai sus este destul de elementară.

I. V MATIES

ANECDOTE ŞI GLUME MATEMATICE

1. Un inspector şcolar vizitează o şcoală în timpul orei de Matematică. Vrând să vadă dacă elevii au înţeles simplificarea şi amplificarea fracţiunilor, el întreabă pe un şcolar: „Pe o farfurie se găseşte $\frac{3}{5}$ dintr'un cârnaţ, pe o altă farfurie $\frac{9}{15}$. Ce farfurie vrei să iei?". — „Aceea cu $\frac{9}{15}$", răspunde elevul. Inspectorul, nemulţumit, se adresează unui alt elev. — „Şi una şi alta", răspunde acesta.

2. Profesorul: „Cum puteţi, în expresiunea $\sqrt{2}\,.\,3$, să introduceţi factorul 3 sub semnul rădăcinii?" Elevul tace şi scrie: $\sqrt{2\,.\,3}$, prelungind semnul $\sqrt{}$. „Dar ce ar fi dacă aţi avea $3\sqrt{2}$?" Elevul prelungeşte semnul $\sqrt{}$ în stângă şi scrie: $\sqrt{3^2\,.\,2}$.

3. Profesorul scrie o ecuaţie: $\frac{2}{3}\left[3\left(\frac{15}{x}+\frac{1}{2}\right)-8\right]-1=5$ şi cere unui elev „să-l găsească pe x". Elevul se apropie de tablă, cercetează ecuaţia şi, în sfârşit, punând degetul arătător pe litera x, exclamă cu multă bucurie: „Aici".

4. Intr'un muzeu ghidul explică: „Această mumie are 5007 ani. „— De unde ştiţi atât de exact?" . Foarte simplu: când am intrat în serviciu, mumia avea 50 0 de ani, iar de atunci sunt tocmai 7 ani". In acelas muzeu: „Iată fiica unui rege, o fată de 16 ani. Mumia are 4000 de ani". „— Scuzaţi, cei 16 ani se socotesc sau nu?"

5. Cineva cumpără un baston. A 2-a zi el vrea să-l schimbe: bastonul îi pare lui prea lung. Vânzătorul propune să tae o bucată de jos. „Nu, nu se poate: jos el e bun, numai sus, la mâner, e prea lung".

6. „Nu cred că pământul este rotund", zice un croitor. „Eu am un cunoscut în Australia, la Sidney, şi el îmi scrie mie că şi acolo trebue să pui nasturi la pantaloni."

7. Un cetăţean a câştigat la loterie lozul cel mare. „Pe ce număr ai jucat", îl întreabă un cunoscut. „Pe 72, şi iată de ce: azi noapte am văzut în vis o mulţime de cifre, tot 8 şi 8. Şi atunci, mi-am zis: joacă odată pe $8\times8=72$, şi, într'adevăr numărul a ieşit!"

8. Celebrul matematician *Kummer* întâlneşte, în timpul unei prelegeri, o înmulţire: 7 . 9. El se opreşte. Un student îi suflă, în glumă: 61; un altul: 65. *Kummer* răspunde: „Nu, domnilor, aceasta este imposibil: 7 . 9 trebue să fie egal sau cu 61 sau cu 65."

9. Despre regula de trei: Un cetăţean se plânge într'un ziar: „Fiul meu a adus o problemă din clasă: „dacă 10 lucrători, lucrând câte 10 ore pe zi, fac o casă în 150 de zile, câţi lucrători ar face aceeaşi casă în 30 de zile, lucrând câte 1 oră pe zi?" Se găseşte, evident: $\frac{10\times150\times10}{30\times1}=500$, 500 de lucrători: „Ar fi bine să facem o încercare", zic eu cu îndoială. După lecţie, profesorul îmi trimite o întrebare: ce am eu contra acestei probleme? „Nimic, Domnule Profesor; aş vrea să Vă atrag numai atenţia că 15.000 de lucrători ar construi aceeaşi casă într'o zi, presupunând că nici-unul nu va călca pe altul pe bătături. Şi, încă ceva: dacă un profesor are nevoie de 7 ani, ca să facă dintr'un copil un elev învăţat, câţi profesori ar face aceeaşi treabă într'o singură zi? Ia, vre-o 2100 profesori". Şi acum el mă dă pe mine în judecată pentru insultă. Dar cine e de vină: eu cred că numai regula de trei".

10. Cititorul unui alt ziar nu crede că în ziua de 29 Iunie 1927 va avea loc o eclipsă de soare El scrie redacţiei: „M'am uitat în calendar şi am văzut că în ziua de 29 Iunie avem luna nouă, Şi dacă luna nici nu este, apoi cum poate ea să eclipseze soarele?"

PETRE V. CAZANACLI

BIBLIOGRAFIE

1. T. Popovici. Thèses, présentées à la Faculté des Sciences de Paris. (12 Juin 1933.) Felicităm călduros pe d-l *Tiberiu Popovici,* un harnic şi distins colaborator al „R. M. T.", pentru obţinerea gradului de Doctor în Matematici, la Universitatea din Paris.

PROBLEME REZOLVATE

898. — *Se dă triunghiul A M B dreptunghic în M. Fie O mijlocul lui A B; P piciorul bisectoarei unghiului A M B; A' intersecţia lui A M cu cercul B M P; B' intersecţia lui B M cu cercul A M P; M_1 intersecţia lui A B' cu B A'; γ intersecţia lui B' P cu paralela dusă prin M_1 la A B; E şi F intersecţiile aceleiaşi paralele cu perpendicularele în A şi B pe A B; I intersecţia lui M P cu M_1 O: α intersecţia lui O E' cu A M; β intersecţia lui O F cu B M; S şi S' intersecţiile lui A M_1, B M_1 cu perpendiculara în mijlocul lui M P; δ, δ' intersecţiile I S, I S' cu A S', B S. Să se demonstreze că următoarele 11 puncte sunt conciclice.*

COL. GH. BUICLIU

Fiind-că:

$$\sphericalangle\, B\,M\,A' = \sphericalangle\, A\,M\,B' = 90^0,$$

se deduce că B A' şi A B' sunt diametri în cercurile B M P şi A M P ale căror centre sunt deci respectiv pe B A' şi A B'.

Perpendiculara pe mijlocul coardei comune M P trece prin centrele acestor cercuri. Deci S şi S' sunt respectiv centrele cercurilor A M P, B M P şi în acelaşi timp mijloacele segmentelor A B', B A', rezulta că:

$$\sphericalangle\, B'\,P\,A = 90^0$$

ca fiind înscris în un semicerc de diametru A B'.

In triunghiul B A B' dreptele B' P, A M fiind înălţimi, rezultă că şi B A' este înalţime.

M P fiind bisectoarea unghiului A M B urmează că:

$$\sphericalangle P M A = 45^0,$$

şi cum patrulaterul B M A′ P este inscriptibil, rezultă:

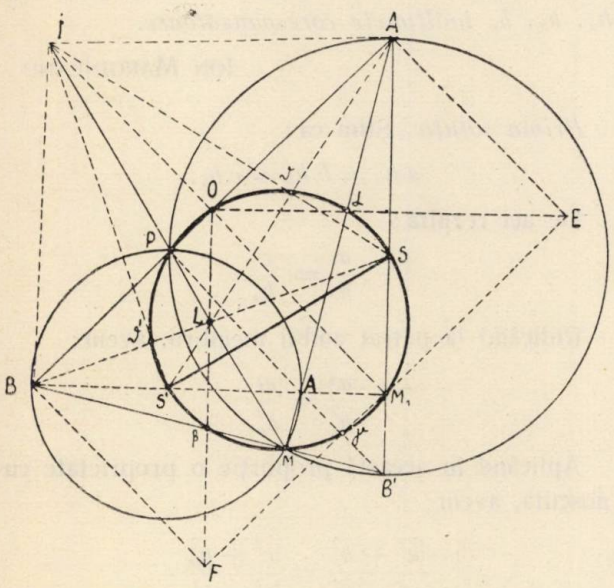
$$\sphericalangle P B A' = \sphericalangle P M A' = 45^0,$$

deci triunghiul dreptunghic B M_1 A este isoscel şi mediana M_1 O a acestui triunghiu este perpendiculară pe A B.

Figurile B O M_1 F şi M_1 O A E sunt patrate egale, ca având laturile egale şi unghiurile drepte. In plus, patratele sunt egale căci:

$$M_1 O = O A = O B.$$

Diagonalele A M_1 şi O F ale acestor patrate fiind inclinate de 45° pe A B sunt paralele, cum O este mijlocul lui A B, rezultă că β este mijlocul lui B B′.



La fel diagonala O E este paralelă cu diagonala B B′ deci α este mijlocul lui A A′.

Am ajuns deci la cocluzia că din cele 11 puncte următoarele 9 sunt conciclice, ca fiind tocmai punctele care determină cercul lui *Euler* al celor 9 puncte:

M, M_1, P sunt picioarele înălţimelor triunghiului A B B′.

O, S, β sunt mijloacele laturilor aceluiaşi triunghiu.

α, S′, γ sunt mijloacele segmentelor A A′, B A′, B′ A′.

Pentru a demonstra că γ este mijlocul lui B′ A′ observ că E F este paralelă cu A B, deci $\perp$ pe A′ B′. Apoi în triunghiul dreptunghic B P A′ unghiul PBA′ fiind 45° rezultă că PA′B este şi el 45° şi deci:

$$\sphericalangle M_1 A' B' = 45^0,$$

ceia ce înseamnă că triunghiul dreptunghic A′ M_1 B′ este isoscel şi atunci E F, care trece prin M_1 şi $\perp$ pe A′ B′, va trece prin mijlocul α al lui A′ B′.

Rămâne de demonstrat că ∂, ∂' se află tot pe cercul lui *Euler* al triunghiului A B B′.

Pentru aceasta urmărim figura şi vedem că avem succesiv:

$$\sphericalangle M O M_1 = 90^0 - M O B = 2B - 90^0$$

$$\sphericalangle O M_1 M = 90^0 - \frac{M_1 O M}{2} = 135^0 - B$$

$$\sphericalangle M_1 M I = M_1 M O + O M B - P M B = 90^0$$

$$\sphericalangle M_1 I M = 90^0 - I M_1 M = B - 45^0 =$$

$$\frac{M O M_1}{2} = M_1 B M.$$

M_1 M B I este deci un patrulater inscriptibil şi

$$M_1 O = M O = O B = O I = O A$$

$$\sphericalangle A I B = 180^0 - A M B = 90^0$$

Patrulaterul A I B M_1 având diagonalele egale şi perpendiculare în mijlocul lor este un patrat, deci:

$$A I = A M_1.$$

Avem însă:

$$A S = S P = M_1 S',$$

triunghiurile A M_1 S′ şi S A I sunt deci egale şi

$$\sphericalangle S A S' = \sphericalangle A I S.$$

Atunci:

$$\sphericalangle A \partial I = \sphericalangle A S I + \sphericalangle S' A S = \sphericalangle A S I +$$

$$\sphericalangle A I S = 90^0$$

deci A $\partial \perp$ S I. Unghiul S ∂ S′ fiind drept *punctul ∂ se află pe cercul de diametru* S S′, adică tot pe cercul celor 9 puncte al triunghiului A B A′.

La fel se arată că şi ∂' se află pe acest cerc.

Au rezolvat foarte bine problema d-nii: *V. I. Crivă*

(București), *C. I. Lățea* (Șc. Of. Artilerie, Timișoara), *N. N. Mihăileanu* (Constanța), *L. I. Pop* (Șc. Politecnică, Timișoara).

Angajez pe corespondenți, să demonstreze că dreptele AS', $O\beta$, SS' sunt concurente în ortocentrul triunghiului SIS'.

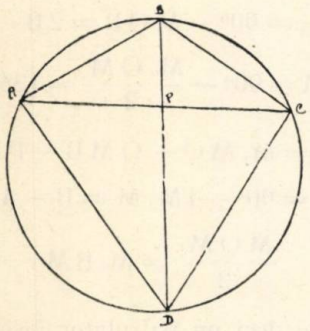
GH. B.

1076. — *Dacă în patrulaterul inscriptibil $ABCD$, avem $AB = BC$, P fiind punctul de intersecție al diagonalelor, atunci există relația:*

$$\overline{BC}^2 = \overline{BP} \times \overline{BD}.$$

LADISLAU BENICZKY

Fie $ABCD$ patrulaterul inscriptibil dat, în care $AB = BC$.



Observăm că triunghiurile BCP și BCD sunt asemenea, având:

$\sphericalangle CBD$, comun.

$$\sphericalangle BCA = \sphericalangle BDC,$$

de oarece, arc BA = arc BC.

Din asemănarea acestor triunghiuri, rezultă proporționalitatea laturilor omoloage, putem deci scri:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$$

De aci deducem:

$$\overline{BC}^2 = \overline{BP} \times \overline{BD}.$$

Soluții date de dra: *Roșca Șt. Veronica* (lic. Internat Craiova) și de d-nii: *Anițescu N. Nicolae* (student, București), *Coandă I. Virgil* (lic. milit., Craiova), *Cojocaru M. Marin* (lic. milit., Craiova), *Dini Al. Ioan* (Șc. milit. de Artilerie), *Curchi Ioan* (student, București), *Fofiu Cornel* (Șc. Polit., Timișoara), *Gheorghe Valeriu* (lic. milit., Tg.-Mureș), *Ghiocel V, Vasile* (lic. Giurgiu), *Ilie C. Ioan* (lic. milit., Tg.-Mureș), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Lățea P. C-tin* (Șc. milit., de Artilerie), *Margulius Marius* (lic. Spiru Haret, București), *Mașcaș Petru* (lic. Beiuș), *Mehedinți D.* (lic. milit., Tg.-Mureș), *Motoc D. Mircea* (Oltenița), *Negrea A. Leonte Mircea* (student, București), *Nenciulescu Hariton* (lic. milit., Tg.-Mureș), *Păunescu N.* (lic. milit, Craiova), *Petre C-tin* (lic. milit., Tg.-Mureș), *Popescu N. Petre* (student, București), *Popescu C. Ștefan* (lic milit., Craiova), *Porumbescu D.* (Tg.-Ocna). *Reghiș Pavel* (lic, Beiuș), *Savovici Florentin* (lic. milit., Tg.-Mureș), *Soare I. Ilie* (lic. milit, Tg.-Mureș), *Sova-Grigoreni I.*, *Ștefănescu Anibal* (București), *Stoicescu I. Ernest* (Șc. milit., de Geniu), *Süli Mihai* (Șc. Polit, Timișoara), *Țica P. Marin* (Șc. milit, de Artilerie), *Țrică Ioan* (Constanța), și *Zamfir D.* (Șc. Navală).

Observare. S'au primit încă două soluții identice, scrise de o aceiaș persoană și iscălite cu nume diferite, din Craiova. Aceste soluții nu le putem menționa.

1127. — *Să se arate că în orice triunghiu există relația:*

$$\frac{(a^2+h_c^2)(b^2+h_a^2)(c^2+h_b^2)}{(a^2+h_b^2)(b^2+h_c^2)(c^2+h_a^2)} = \frac{(a^2-h_c^2)(b^2-h_a^2)(c^2-h_b^2)}{(a^2-h_b^2)(b^2-h_c^2)(c^2-h_a^2)},$$

unde a, b, c sunt laturile triunghiului, iar h_a, h_b, h_c înălțimele corespunzătoare.

ION MARGINEANU

Prima soluție. Știm că:

$$a\,h_a = b\,h_b = c\,h_c.$$

De aci rezultă:

$$\frac{a}{h_c} = \frac{c}{h_a}.$$

Ridicând la patrat ambii membrii, avem:

$$\frac{a^2}{h_c^2} = \frac{c^2}{h_a^2}$$

Aplicând în această proporție o proprietate cunoscută, avem:

$$\frac{a^2+h_c^2}{a^2-h_c^2} = \frac{c^2+h_a^2}{c^2-h_a^2},$$

sau:

$$(1) \qquad \frac{a^2+h_c^2}{c^2+h_a^2} = \frac{a^2-h_c^2}{c^2-h_a^2}$$

Analog obținem:

$$(2) \qquad \frac{b^2+h_a^2}{a^2+h_b^2} = \frac{b^2-h_a^2}{a^2-h_b^2}$$

$$(3) \qquad \frac{c^2+h_b^2}{b^2+h_c^2} = \frac{c^2-h_b^2}{b^2-h_c^2}$$

Inmulţind membru cu membru relaţiile (1), (2) şi (3), obţinem:

$$\frac{(a^2+h_c^2)(b^2+h_a^2)(c^2+h_b^2)}{(a^2+h_a^2)(b^2+h_c^2)(c^2+h_a^2)} = \frac{(a^2-h_c^2)(b^2-h_a^2)(c^2-h_b^2)}{(a^2-h_b^2)(b^2-h_c^2)(c^2-h_a^2)},$$

care este tocmai relaţiunea dată.

Soluţii date de d-ra: *Cornăţeanu Ileana* şi de d-nii: *Băleanu D-tru Răsvan* (Şc. Preg. de Ofiţeri), *Boerescu P. George* (Şc. Preg. de Ofiţeri), *Curchi Ioan* (student, Bucureşti), *Ivănescu Cezar* (bacalaureat, Bârlad), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Popescu Adrian* (student) şi *Tutunaru Gh. D-tru* (Şc. Milit. de Artilerie).

Observare. D-nii *Băleanu D-tru Răsvad* (Şc. Preg. de Ofiţeri) şi *Boerescu P. George* (Şc. Preg. de Ofiţeri) au generalizat problema, înlocuind exponentul 2 prin *n*.

Soluţia 2-a. Folosim formulele evidente:

$$h_a = b\sin C = c\sin B, \qquad h_b = a\sin C = c\sin A,$$
$$h_c = a\sin B = b\sin A.$$

Atunci avem:

$$a^2 \pm h_c^2 = a^2(1 \pm \sin^2 B),$$
$$a^2 \pm h_b^2 = a^2(1 \pm \sin^2 C),$$

De aci rezultă:

$$(1)\quad \prod \frac{a^2+h_c^2}{a^2+h_b^2} = \frac{a^2b^2c^2(1+\sin^2 B)(1+\sin^2 C)(1+\sin^2 A)}{a^2b^2c^2(1+\sin^2 B)(1+\sin^2 C)(1+\sin^2 A)} = 1$$

$$(2)\quad \prod \frac{a^2-h_c^2}{a^2-h_b^2} = \frac{a^2b^2c^2\cos^2 B\cos^2 C\cos^2 A}{a^2b^2c^2\cos^2 B\cos^2 C\cos^2 A} = 1$$

Comparând relaţiile (1) şi (2), obţinem:

$$\prod \frac{a^2+h_c^2}{a^2+h_b^2} = \prod \frac{a^2-h_c^2}{a^2-h_b^2},$$

adică relaţia dată.

Soluţii date de d-ra: *Roşca St. Veronica* (lic. Internat, Craiova) şi de d-nii: *Arbter Emil* (lic. Beius), *Bedron Iosif* (lic. Beiuş), *Belu I. Stefan* (lic. Mizil), *Chiriac C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Costache I. Gheorghe* (lic. Mizil), *Diaconescu D. C-tin* (lic. Mizil), *Gavrilescu Gh.* (lic. Mizil), *Georgescu N. Mihail* (lic. Mizil), *Ghiţă I. Traian* (lic. Mizil), *Iacobescu I. Oprea* (lic. Mizil), *Ionescu M. Gheorghe* (lic. Mizil), *Ionescu Şt Stelian* (lic. Mizil), *Iuga Ioan* (lic. Mizil), *Maşcaş Petru* (lic. Beiuş), *Motoc D. Mircea* (Oltenita), *Negrea A. Leonte Mircea* (licenţiat în Matematici), *Niculescu Vasile* (lic. Mizil), *Oancea I. Andrei* (lic. Mizil), *Predoescu P. Gheorghe* (lic. Mizil), *Rădulescu T. D-tru* (lic. Mizil), *Sandu I. Oancea* (lic. Mizil), *Săndulescu Ioan* (Şc. Polit, Timişoara), *Sân Petru I. D-tru* (lic. Mizil), *Stanciu Stefan* (lic. Mizil), *Stefănescu I. Ion* (lic. Mizil), *Stern M. Nicolaie* (lic. Beiuş), *Toma I. Ioan* (lic. Mizil) şi *Zaharia D. C-tin* (lic. Mizil).

Soluţia 3 a. Generalizare.

Folosind relaţiile cunoscute:

$$h_a = \frac{2s}{a}, \qquad h_b = \frac{2s}{b}, \qquad h_c = \frac{2s}{c},$$

putem scri:

$$(1)\quad \prod \frac{a^n+h_c^n}{c^n+h_a^n} = \prod \frac{\dfrac{a^n c^n + 2^n s^n}{c^n}}{\dfrac{a^n c^n + 2^n s^n}{a^n}} = \prod \frac{a^n}{c^n} = 1$$

$$(2)\quad \prod \frac{a^n-h_c^n}{c^n-h_a^n} = \prod \frac{\dfrac{a^n c^n - 2^n c^n}{c^n}}{\dfrac{a^n c^n - 2^n c^n}{a^n}} = \prod \frac{a^n}{c^n} = 1$$

Din (1) şi (2), deducem:

$$\prod \frac{a^n+h_c^n}{c^n+h_a^n} = \prod \frac{a^n-h_c^n}{a^n-h_a^n},$$

care este tocmai relaţia dată, generalizată.

Soluţii date de d-nii: *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti) şi *Predoescu I. M.* (lic. Buzeşti, Craiova).

Au soluţionat problema, fără a o generaliza, d-ra: *Antoniu Emilia* (lic. Oltea-Doamna, Iaşi) şi d-nii: *Bileţchi Mircea* (Şc. Polit., Timişoara), *Boisnard Jean* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Chiriţă Mihail* (lic. Milit., Craiova), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M. Marin* (lic. Milit, Craiova), *Coman Alexandru* (bacalaureat, Năsăud), *Godeanu Ig. Vasilie* (lic. Milit., Craiova), *Ionescu C. Emil* (bacalaureat, Craiova), *Margulius Marius* (Bucureşti), *Mazilu Panaite* (lic. Internat, Iaşi), *Mehedinţi D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Mihalcea Nicolae* (lic. Beiuş), *Millea S. E.* (Sub-Lt.), *Păunescu N.* (lic. Milit., Craiova), *Petrescu D. Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Popa B. Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Popescu C. Stefan* (lic. Milit., Craiova), *Porumbescu D.* (Tg-Ocna), *Predoescu Traian* (lic. Milit., Craiova), *Procopiescu Mihai* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Sandovici Silică* (lic. Internat Iaşi), *Santto F. Georges* (lic. Internat, Iaşi), *Sâmbotin Gh.* (Sub-Lt.), *Stoica G. Ion* (Sub-Lt.), *Süli Mihai* (Şc. Polit., Timişoara), *Tica P. Marinel* (Sub-Lt.), *Trică S. Ion* (Caransebeş) şi *Vasiliu-Leoben Gh.* (Inginer).

1128. — *Să se arate că dacă notaţiile sunt cele obicinuite într'un triunghiu, avem relaţia:*

$$r_a^3 + r_b^3 + r_c^3 = (4R + r)^3 - 12Rp^2$$

SUB.-LT. IOAN C. SAVIN

Ridicăm la cub relația cunoscută:

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r, \tag{1}$$

și avem:

$$r_a^3 + r_b^3 + r_c^3 + 3(r_a + r_b + r_c)\Sigma r_a r_b - 3 r_a r_b r_c = (4R + r)^3 \tag{2}$$

Ținând seamă de (1) și de relațiile cunoscute:

$$\Sigma r_a r_b = p^2, \qquad r_a r_b r_c = p^2 r$$

(„R. M. T.“, an. XII, No. 1, pag. 6), relația (2) se poate scri:

$$r_a^3 + r_b^3 + r_c^3 = (4R + r)^3 - 3(4R + r)\, p^2 + 3p^2 r = (4R + r)^3 - 12Rp^2,$$

care este tocmai relația cerută.

Soluții date de d-rele: *Antoniu V. Emilia* (Iași) și *Cornățeanu Ileana* și de d nii: *Băleanu D-tru* (Șc. Milit. de Artilerie), *Biletchi Mircea* (Șc. Polit., Timișoara), *Boerescu P. George* (Șc. Preg. de Ofițeri) *Chiriac C-tin* (lic. Milit., Iași), *Chirlță Mihail* (lic. Milit, Craiova), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Codreș Florian* (Sub-Lt), *Cojocaru M.*, *Cosman Alexandru* (bacalaureat, Năsăud), *Curchi Ioan* (student, București), *Dima A. Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Ghiocel V. Vasile* (lic. Giurgiu), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Ionescu C. Emil* (bacalaureat, Craiova), *Lățea P. C-tin* (Șc. Milit. de Artilerie), *Margulius Marius* (București), *Mazilu Panait* (lic. Internat, Iași), *Mehdinți D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Mereuță Emilian*, *Negrea A. Leonte-Mircea* (licențiat în Matematici), *Păunescu N.* (lic. Milit., Craiova), *Popa B. Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Ioan Gh. Popa* (București), *Popescu Adrian* (student), *Porumbescu D.* (Tg-Ocna), *Predoescu I. Marin* (lic. Buzești, Craiova), *Predoescu Traian* (lic. Milit., Craiova), *Sandovici Silică* (lic. Internat, Iași), *Săndulescu Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Sâmbotin Gh.* (Sub-Lt.) *Theoharide Lucian* (Șc Preg. de Ofițeri, București), *Trică S. Ioan* (Caransebeș) și *Vasiliu-Leoben Gh.* (Inginer).

PROBLEME PROPUSE

1217. — Să se găsească restul împărțirii expresiunii:

$$1001^{567} + 367^{764} - 10,$$

prin 31.

TRAIAN PREDOESCU

1218. — Să se determine ultimul grup de trei cifre, în cari se poate termina N^{100}, N fiind un întreg oarecare.

I. V. MATIES

1219. — Se dau două drepte fixe Δ și Δ'. Se iau punctele fixe A și B în planul lor și un punct mobil C pe dreapta Δ' Dreptele BC și AC taie dreapta Δ în N și M; iar dreptele AN și BM se taie în P. Se cere locul geometric al punctului P, când punctul C se mișcă pe Δ'.

IOAN I SANDULESCU

1220. — Se consideră un triunghiu oarecare ABC și A_1, B_1, C_1 punctele unde înălțimele tae cercul circumscris.

Fie B′ și C′ picioarele bisectoarelor interioare sau exterioare duse din A_1 în triunghiurile A_1AC și A_1AB.

Să se demonstreze că dreapta B′C′ și analoagele ei, tae laturile triunghiului în trei puncte colineare.

CEZAR IVANESCU

1221. — Să se determine coeficienții a, b, c, d, astfel ca polinomul:

$$x^9 + a x^3 + b x^2 + c x + d = 0,$$

să se dividă prin $(x-1)^4$ și în acest caz să se afle câtul.

V ALACI

1222. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} (x + 2y)^4 + (x - 2y)^4 = 256 \\ x^3 y + 4 x y^3 = 16 \end{cases}$$

IOAN CURCHI

1223. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y - 3(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = a - 3 \\ \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 z - 3(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} z) + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} z = b - 3 \\ \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 z - 3(\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z) + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z = c - 3 \end{cases}$$

ION MARGINEANU

1224. — Se dau două roți cu razele R_1 și R_2 antrenate una de alta prin o curea prinsă cu copcii metalice. Distanța între axele roților e dată, D. Intervalul de timp între două sunete consecutive provocate de contactul copciei cu saiba este cunoscut, T secunde. Presupunând cureaua perfect elastică și alunecarea ei nulă, se cere turația pe minut a celor două roți, în cazul când, $D = 10R_1$ și $R_2 = 6R_1$, $R_1 = 10$ cm. și $T = \frac{1}{14}$ sec.

A. BARGLAZAN

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**

Administration
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

LA REDACȚIA „REVISTEI MATEMATICE DIN TIMIȘOARA SE PRIMESC ABONAMENTE PENTRU ANUL AL V-LEA (MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)

DE BOLETIN MATEMATICO

COSTUL UNUI ABONAMENT FIIND DE 300 LEI ȘI PENTRU ANUL AL III-LEA (MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)

DE BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

COSTUL ABONAMENTULUI FIIND DE 125 LEI, PUBLICATE ÎN BUENOS AIRES; AMÂNDOUĂ 400 LEI

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Abonamentul pe anul XIII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL XIII. 15 SEPTEMBRIE 1933 No. 7.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.

PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 M. V. THÉBAULT: SUR LA DISTANCE DU CENTRE DE GRAVITÉ AU POINT DE LEMOINE D'UN TRIANGLE

2. CEZAR COȘNIȚĂ: ALTE TEOREME IN LEGATURA CU DOUA TRIUNGHIURI SAU DOUA POLIGOANE

3. NOTE MATEMATICE: 12, 13.

4 CHESTIUNI DE EXAMEN.

5. BIBLIOGRAFIE.

6. PROBLEME REZOLVATE: 917, 1005, 1101, 1136, 1151, 1152.

7. PROBLEME PROPUSE: 1225-1229, 863, 1230-1231.

8. INFORMATIUNI.

TIMISOARA

Institut de Artegrafice „Tipografia Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci** –profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara“ este pentru anul XIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare

---

ANUL XIII — No 7. TIMISOARA, 15 SEPTEMBRIE 1933

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie.

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

SUR LA DISTANCE DU CENTRE DE GRAVITÉ AU POINT DE LEMOINE D'UN TRIANGLE

Par

M V. THÉBAULT
le Mans (France).

1. *M. K. Goormaghtigh* a donné, sans démonstration, l'expression suivante du carré de la distance GK du centre de gravité au point de *Lemoine* d'un triangle ABC:

$$\overline{GK}^2 = \frac{4S}{9}(2\cot\theta - 3\cot 2\theta) - 3R^2\operatorname{tg}^2\theta ,$$

en fonction de l'aire S, du rayon R du cercle circonscrit et de l'angle θ de *Brocard* du triangle.[1]

2. Voici une autre expression de la distance GK en fonction de S, θ, et des longueurs des médianes m_a, m_b, m_c, du triangle.

Soient α, β, γ, les projections orthogonales du point K sur les côtés $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. On a:

$$\beta\gamma = AK\sin A , \quad \gamma\alpha = BK\sin B ,$$
$$\alpha\beta = CK\sin C.$$

Mais:

$$AK = \frac{2bcm_a}{a^2+b^2+c^2} , \quad BK = \frac{2acm_b}{a^2+b^2+c^2} ,$$
$$CK = \frac{2abm_c}{a^2+b^2+c^2} .$$ [2]

Alors:

$$\beta\gamma = \frac{m_a}{\cot\theta} , \quad \gamma\alpha = \frac{m_b}{\cot\theta} , \quad \alpha\beta = \frac{m_c}{\cot\theta} .$$

Si l'on pose:

$$m_a + m_b + m_c = 2M ,$$

l'aire du triangle $\alpha\beta\gamma$ s'exprime:

$$S_1 = \frac{1}{\cot^2\theta}\sqrt{M(M-m_a)(M-m_b)(M-m_c)} ,$$

c'est-à-dire:

$$S_1 = \frac{1}{\cot^2\theta}\cdot\frac{3S}{4} = \frac{3S}{4\cot^2\theta} ,$$

le radical précédent ayant pour valeur $\frac{3S}{4}$. [3]

Par suite, le rayon du cercle circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$ a pour expression:

$$(1) \qquad \varrho = \frac{\beta\gamma\cdot\gamma\alpha\cdot\alpha\beta}{4S_1} = \frac{m_a m_b m_c}{3S\cot\theta} .$$

Les points G, K, conjugués isogonaux par rapport au triangle ABC, sont les foyers d'une conique inscrite à ce triangle. Le grand axe de cette conique égale 2ϱ, et le carré de son demi petit axe β est le produit des distances des points G et K au côté BC, par exemple. Or, ces distances sont respectivement $\frac{h_a}{3}$ et $\frac{2aS}{a^2+b^2+c^2}$, h_a étant la hauteur du triangle issue de A.

Il vient donc:

$$(2) \qquad \beta^2 = \frac{2ah_aS}{3(a^2+b^2+c^2)} = \frac{4S^2}{3(a^2+b^2+c^2)} = \frac{S}{3\cot\theta} .$$

Mais on a aussi la relation:

$$\overline{GK}^2 = 4(\varrho^2 - \beta^2) ,$$

qui, après introduction des valeurs (1) et (2), donne:

$$\overline{GK}^2 = \frac{4}{3\cot\theta}\left|\frac{(m_a m_b m_c)^2}{3S\cot\theta} - S\right| .$$

[1]) *Mathesis*, 1926—121.
[2]) *V. Thébault*, (*Mathesis* 1933—191).
[3]) Voir, par exemple, *Relations entre les éléments d'un triangle*, p. 98 (Librairie Vuibert, Paris).

ALTE TEOREME ÎN LEGĂTURĂ CU DOUĂ TRIUNGHIURI SAU DOUĂ POLIGOANE

de CEZAR COȘNIȚĂ

In numărul 4 (anul XIII) al Revistei, d-l *N. Botea* expune o serie de proprietăți în legătură cu două triunghiuri sau două poligoane. In rândurile cari urmează vreau să expun o altă serie de proprietăți de aceași natură, relative la două triunghiuri sau două poligoane. Voi însista mai ales însă asupra celor relative la triunghiuri, fiindcă în acest caz proprietățile au un caracter *proectiv*, pe când în cazul poligoanelor oarecari au un caracter *metric*.

*

I. *Lemă. Fie într'un plan un segment de dreaptă A B pe care o curbă algebrică de gradul n, de ecuație* $f(x, y, z) = 0$, *îl tae în punctele* $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

In aceste condiții, avem relația:

$$\frac{\overline{M_1 A}}{\overline{M_1 B}} \cdot \frac{\overline{M_2 A}}{\overline{M_2 B}} \cdots \frac{\overline{M_n A}}{\overline{M_n B}} = \frac{f(x_1, y_1, z_1)}{f(x_2, y_2, z_2)} \cdot \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n,$$

în care (x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2) *sunt coordonatele omogene ale punctelor A, B.*

Demonstrația acestei leme se face în modul următor:

Coordonatele omogene ale unui punct M de pe A B sunt:

$$x_1 + \lambda x_2, \quad y_1 + \lambda y_2, \quad z_1 + \lambda z_2,$$

unde:

$$\lambda = -\frac{\overline{M A}}{\overline{M B}} \cdot \frac{z_1}{z_2}.$$

Scriind că aceste coordonate verifică ecuația curbei:

$$f(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2) = 0,$$

sau:

$$P_0 + P_1 \cdot \lambda + P_2 \cdot \lambda^2 + \cdots + P_n \cdot \lambda^n = 0,$$

unde $P_0, \cdots, P_n$ sunt polinoame în $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$.

La fiecare rădăcină a acestei ecuații în λ corespunde câte un punct M de intersecție al curbei cu direcția A B, astfel că vom avea:

$$(-1)^n \frac{\overline{M_1 A}}{\overline{M_1 B}} \cdot \frac{\overline{M_2 A}}{\overline{M_2 B}} \cdots \frac{\overline{M_n A}}{\overline{M_n B}} = (-1)^n \frac{P_0}{P_n} \cdot \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^n.$$

Dar în identitatea:

$$f(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2) \equiv$$

$$P_0 + P_1 \lambda + \cdots + P_n \cdot \lambda^n,$$

în care λ poate avea orice valoare (și ∞), făcând $\lambda = 0$, deducem:

$$P_0 \equiv f(x_1, y_1, z_1).$$

Apoi, deoarece f e un polinom omogen în x, y, z, avem:

$$f[k(x_1 + \lambda x_2), k(y_1 + \lambda y_2), k(z_1 + \lambda z_2)] \equiv$$

$$k^n \cdot f(x_1 + \lambda x_2, \ldots).$$

Luând în special $k = \frac{1}{\lambda}$, deducem:

$$f\left(\frac{1}{\lambda} x_1 + x_2, \frac{1}{\lambda} y_1 + y_2, \frac{1}{\lambda} z_1 + z_2\right) \equiv$$

$$\frac{1}{\lambda^n} f(x_1 + \lambda x_2, \cdots) \equiv \frac{1}{\lambda^n} P_0 + \cdots + P_n.$$

Dacă aici facem $\lambda = \infty$, deducem:

$$P_n \equiv f(x_2, y_2, z_2).$$

Lema de mai sus e astfel demonstrată.

Cu ajutorul acestei leme se pot scoate o mulțime de relații referitoare la poligoanele ale căror laturi sunt tăiate de curbe algebrice oarecari, relații cari generalizează teorema transversalelor din triunghiuri. In particular, se poate demonstra teorema lui *Carnot* (și reciproca ei) referitoare la șase puncte depe laturile unui triunghiu, cari sunt pe o conică.

O lemă analoagă se stabilește în spațiu pentru un segment de dreaptă tăiat de o suprafață algebrică oarecare.

II. *Fie acum două triunghiuri coplanare A B C,* $A' B' C'$ *și o conică* (Γ) *în același plan. Tangentele duse din vârfurile* A', B', C' *la* (Γ) *întâlnesc laturile B C, C A, A B respectiv în* M, m; N, n; P, p, *iar tangentele duse din vârfurile A, B, C la* (Γ) *întâlnesc laturile* $B' C'$, $C' A'$, $A' B'$ *respectiv în* M', m'; N', n'; P', p'.

Dacă punctele M, m; N, n; P, p sunt pe o conică, atunci şi punctele M', m'; N', n'; P', p' sunt pe o conică.

In adevăr, condiţiile necesare şi suficiente ca aceste două grupuri de puncte să fie pe câte o conică, sunt:

$$(1)\qquad \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{mB}}{\overline{mC}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\cdot\frac{\overline{nC}}{\overline{nA}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{pA}}{\overline{pB}}=+1$$

$$(2)\qquad \frac{\overline{M'B'}}{\overline{M'C'}}\cdot\frac{\overline{m'B'}}{\overline{m'C'}}\cdot\frac{\overline{N'C'}}{\overline{N'A'}}\cdot\frac{\overline{n'C'}}{\overline{n'A'}}\cdot\frac{\overline{P'A'}}{\overline{P'B'}}\cdot\frac{\overline{p'A'}}{\overline{p'B'}}=+1.$$

Fie (x_i, y_i, z_i), (x_i', y_i', z_i') $(i=1,2,3)$ coordonatele vârfurilor triunghiurilor ABC, $A'B'C'$, iar $f(x,y,z)=0$, ecuaţia conicei (Γ).

Ecuaţia ansamblului dreptelor $A'M$, $A'm$ este:

$$\left(x f'_{x_1'}+y f'_{y_1'}+z f'_{z_1'}\right)^2-4 f(x_1', y_1', z_1')\, f(x,y,z)=0.$$

Să facem acum, pentru prescurtare, notaţia:

$$\left(x_i f'_{x_k'}+y_i f'_{y_k'}+z_i f'_{z_k'}\right)^2-$$

$$4 f(x_k', y_k', z_k')\, f(x_i, y_i, z_i)\equiv (i, k').$$

Conform lemei stabilite, vom avea atunci:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{mB}}{\overline{mC}}=\frac{(2,1')}{(3,1')}\cdot\left(\frac{z_3}{z_2}\right)^2 \text{ etc.}$$

Aşa încât condiţiile (1), (2) devin:

$$(1')\qquad \frac{(2,1')}{(3,1')}\cdot\frac{(3,2')}{(1,2')}\cdot\frac{(1,3')}{(2,3')}=+1;$$

$$(2')\qquad \frac{(2',1)}{(3',1)}\cdot\frac{(3',2)}{(1',2)}\cdot\frac{(1'.3)}{(2',3)}=+1.$$

Dar deoarece avem identităţile:

$$(i,k')\equiv(k'\,i)\qquad (i,k=1,2,3),$$

condiţiile (1'), (2') sunt echivalente, ceeace demonstrează proprietatea.

Pentru spaţiu avem proprietatea următoare:

Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri oarecari în spaţiu şi o cuadrică (Q). Conurile cu vârfurile A', B', C' şi circumscrise cuadricei (Q) sunt înţepate de laturile BC, CA, AB respectiv în câte două puncte. La fel, conurile cu vârfurile A, B, C şi circumscrise cuadricei (Q) sunt înţepate de laturile $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ respectiv în câte două puncte.

Dacă cele 6 puncte depe laturile lui ABC sunt aşezate pe o conică, atunci şi cele 6 puncte depe laturile lui $A'B'C'$ sunt aşezate pe o conică.

Demonstraţia se face analog ca în plan. Se va scrie ecuaţia cuadricei (Q), $f(x,y,z,t)=0$, şi se va ţine seama că ecuaţia conului cu vârful $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ şi circumscris cuadricei (Q) este:

$$(x f'_\alpha+y f'_\beta+z f'_\gamma+t f'_\delta)^2-$$
$$4 f(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\, f(x,y,z,t)=0.$$

Cazuri particulare: 1°. Când conica (Γ) se reduce la un punct, avem problema No. 4164 din *„Gazeta Matematică"*.

2°. Când triunghiurile ABC, $A'B'C'$ sunt înscrise în conica (Γ); în acest caz proprietatea se enunţă aşa:

Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri oarecari înscrise în o conică (Γ). Dacă triunghiul tangenţial al lui ABC e omologic cu $A'B'C'$, şi triunghiul tangenţial al lui $A'B'C'$ e omologic cu ABC.

Această proprietate se poate generaliza astfel:

Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri oarecari coplanare şi (Γ) o conică în planul lor. Dacă triunghiul polar reciproc al lui ABC faţă de (Γ) e omologic cu $A'B'C'$, şi triunghiul polar reciproc al lui $A'B'C'$ faţă de (Γ) e omologic cu ABC.

Demonstraţia acestei proprietăţi se face în acelaş spirit ca mai sus. Se va scrie ecuaţia polarei unui punct (α,β,γ) faţă de conica $f(x,y,z)=0$, sub forma:

$$x f'_\alpha+y f'_\beta+z f'_\gamma=0,$$

şi se va înlocui în relaţia lui *Menelaus* etc.

In particular, avem proprietatea precisă:

Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri coplanare omologice, iar (Γ) o conică conjugată faţa cu unul din ele — de exemplu faţă cu ABC. In acest caz, triunghiul ABC este omologic cu triunghiul polar reciproc al lui $A'B'C'$ faţă de (Γ).

Cazuri particulare în spaţiu: 1°. Când cuadrica (Q) se reduce (din punct de vedere tangenţial) la o conică.

2. Când vârfurile celor două triunghiuri sunt aşezate pe cuadrica (Q). Atunci proprietatea se enunţă aşa:

Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri oarecari în spaţiu, iar (Q) o cuadrică arbitrară ce trece prin vârfurile lor. Dacă planele tangente în vârfurile A', B', C' la (Q) tae pe BC, CA, AB respectiv în trei puncte colineare, atunci şi planele tangente în A, B, C la (Q), tae pe $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ respectiv în trei puncte colineare.

Ultima proprietate se generalizează astfel:

Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri oarecari în spaţiu şi (Q) o cuadrică arbitrară. Dacă planele polare ale punctelor A', B', C' în raport cu (Q) tae pe BC, CA, AB respectiv în trei puncte colineare, şi planele polare ale punctelor A, B, C faţă de (Q) tae pe $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ respectiv în trei puncte colineare.

Demonstraţia exact ca în plan.

III. Să considerăm acum din nou două triunghiuri ABC, $A'B'C'$ în acelaş plan. Mai luăm în acelaş plan patru puncte oarecari $P_i\ (i=1,2,3,4)$.

Conicele (A', P_i), (B', P_i), (C', P_i) tae pe BC, CA, AB respectiv în câte două puncte. Analog, conicele (A, P_i), (B, P_i), (C, P_i) tae pe $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ respectiv în câte două puncte. Dacă primele şase puncte sunt pe o conică şi celelalte şase sunt pe o conică.

Pentru demonstraţie să notăm cu (x_i, y_i, z_i), (x_i', y_i', z_i'), $(i=1,2,3)$ coordonatele vârfurilor celor două triunghiuri, iar cu $f(x,y,z)=0$, $g(x,y,z)=0$ ecuaţiile a două conice oarecari ce trec prin punctele P_i. Atunci ecuaţia conicei (A', P_i) este:

$$g_1' \cdot f - f_1' \cdot g = 0,$$

unde am însemnat:

$$f_1' = f(x_1', y_1', z_1'), \quad g_1' \equiv g(x_1, y_1', z_1').$$

Se găseşte atunci că pentruca primele şase puncte să fie pe o conică, e necesar şi suficient să avem:

$$(I)\quad \frac{g_1' f_2 - f_1' g_2}{g_1' f_3 - f_1' g_3} \cdot \frac{g_2' f_3 - f_2' g_3}{g_2' f_1 - f_2' g_1} \cdot \frac{g_3' f - f_3' g_1}{g_3' f - f_3' g_2} = +1,$$

iar ca ultimile şase puncte să fie pe o conică, e necesar şi suficient să avem:

$$(II)\quad \frac{g_1 f_2' - f_1 g_2'}{g_1 f_3' - f_1 g_3'} \cdot \frac{g_2 f_3' - f_2 g_3'}{g_2 f_1' - f_2 g_1'} \cdot \frac{g_3 f_1' - f_3 g_1'}{g_3 f_2' - f_3 g_2'} = +1.$$

Se vede că aceste două condiţii (I) şi (II) sunt echivalente, deci proprietatea e demonstrată.

In spaţiu, avem o proprietate analoagă:

Fie ABC, $A'B'C'$ două triunghiuri oarecari în spaţiu. Se mai consideră încă 8 puncte oarecari în spaţiu, sau, ceace-i tot una, o bicuadratică (B_4). Cuadricile (A', B_4), (B', B_4), (C', B_4) sunt înţepate de laturile BC, CA, AB în câte două puncte. Analog, cuadricile (A, B_4), (B, B_4), (C, B_4) sunt înţepate de laturile $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ respectiv în câte două puncte.

Dacă primele şase puncte sunt pe o conică, şi celelalte şase sunt pe o conică.

Demonstraţie analoagă ca în plan. Se va reprezenta (B_4) ca intersecţie de două cuadrice:

$$f + \lambda g = 0.$$

Cazuri particulare în plan: 1°. Când punctele P_i sunt pe aceaşi conică împreună cu A, B, C, de exemplu. Atunci proprietatea devine:

Fie o conică (Γ) circumscrisă triunghiului ABC. Pe această conică se iau 4 puncte arbitrare $P_i\ (i=1,2,3,4)$. Se mai ia încă un triunghiu $A'B'C'$ în acelaş plan. Conicele (A', P_i), (B', P_i), (C', P_i) tae pe BC, CA, AB în şase puncte situate pe o conică.

2°. Dacă două din punctele P_i sunt punctele ciclice, proprietatea devine:

Se dau în acelaş plan două triunghiuri oarecari ABC, $A'B'C'$. Pe cercul ABC se iau arbitrar punctele P, Q. Cercurile $A'PQ$ $B'PQ$, $C'PQ$ tae pe BC, CA, AB respectiv în şase puncte pe o conică.

Cazuri particulare în spaţiu: 1°. *Când punctele A, B, C, de exemplu, sunt situate pe o cuadrică ce conţine pe (B_4). In acest caz, cuadricele (A', B_4), (B', B_4), (C', B_4) tae pe BC, CA, AB în şase puncte situate pe o conică.*

2°. Când (B_4) se descompune într'un cerc şi în ombilicală. Atunci cuadricele (A', B_4)... etc., devin nişte sfere.

IV. Aplicaţii numeroase ale acestor teoreme se pot face, considerând poziţii speciale ale celor două triunghiuri sau studiind cazurile de degenerescenţă ale conicilor şi cuadricelor din enunţuri. Nu mă ocup de aceste particularizări. Ca încheere, să arăt cum se generalizează la poligoanele de număr impar de laturi, teoremele de mai sus. Am spus că în acest caz avem teoreme cu caracter *metric*. Iată de exemplu cum se poate extinde prima teoremă:

Fie în acelaş plan două poligoane oarecari: $A_1 A_2 \cdots A_{2k+1}$, $B_1 B_2 \cdots B_{2k+1}$ *şi o conică* (Γ) *în acelaş plan. Tangentele duse din vârful* A_i *la* (Γ) *tae laturea* $B_{i+k} B_{i+k+1}$ *în punctele* β_i, β_i', *iar tangentele duse din* B_i *la* (Γ) *tae laturile* $A_{i+k} A_{i+k+1}$ *în punctele* α_i, α_i'.

In aceste condiţii, avem relaţia:

$$\prod_{i=1}^{2k+1} \frac{\alpha_i A_{i+k}}{\alpha_i A_{i+k+1}} \cdot \frac{\alpha_i' A_{i+k}}{\alpha_i' A_{i+k+1}} \cdot \frac{\beta_i B_{i+k}}{\beta_i B_{i+k+1}} \cdot \frac{\beta_i' B_{i+k}}{\beta_i' B_{i+k+1}} = +1.$$

Pentru demonstraţie însemn cu (x_j, y_j, z_j), (x_j', y_j', z_j') $(j = 1, 2, \cdots, 2k+1)$ coordonatele vârfurilor celor două poligoane, iar cu $f(x, y, z) = 0$, ecuaţia conicei (Γ).

Ecuaţia ansamblului de drepte $A_i\beta_i$, $A_i\beta_i'$ este deci:

$$\left(x f_{x_i}' + y f_{y_i}' + z f_{z_i}'\right)^2 - 4 f(x_i, y_i, z_i) f(x, y, z) = 0.$$

$$(1) \quad \frac{\beta_i B_{i+k}}{\beta_i B_{i+k+1}} \cdot \frac{\beta_i' B_{i+k}}{\beta_i' B_{i+k+1}} = \frac{[(i+k)', i]}{[(i+k+1)', i]}$$

Observăm acum că vârfurilor B_{i+k}, B_{i+k+1} li se opun laturile: $B_{i+2k} B_{i+2k+1} \equiv B_{i-1} B_i$, $B_{i+2k+1} B_{i+2k+2} \equiv B_i B_{i+1}$, deci în celalt poligon le corespund laturile $A_{i-1} A_i$, $A_i A_{i+1}$.

Cu notaţiile admise se găseşte:

$$(2) \quad \begin{aligned} &\frac{\alpha_{i+k} A_{i-1}}{\alpha_{i+k} A_i} \cdot \frac{\alpha_{i+k}' A_{i-1}}{\alpha_{i+k}' A_{i-1}} = \frac{[i-1, (i+k)']}{[i, (i+k)']} \\ &\frac{\alpha_{i+k+1} A_i}{\alpha_{i+k+1} A_{i+1}} \cdot \frac{\alpha_{i+k+1}' A_i}{\alpha_{i+k+1}' A_{i+1}} = \frac{[i, (i+k+1)']}{[i+1, (i+k+1)']} \end{aligned}$$

Se vede atunci că termenii raportului din (1) dispar cu câte unul din cei ai rapoartelor (2). Tot aşa se întâmplă cu toate rapoartele din produs.

O altă demonstraţie se poate face prin inducţie completă.

In acelaş chip se generalizează şi celelalte teoreme pentru două poligoane oarecari plane sau strâmbe.

Ar fi de văzut dacă nu cumva aceste teoreme cât şi cele ale d-lui *Botea* au o origină comună sau se extind şi la alte configuraţii plane sau spaţiale.

NOTE MATEMATICE

---

12. — *Asupra problemei 4086 din „G. M."*

In „*Gazeta Matematică*", vol. XXXVIII, Iulie 1933, este rezolvată următoarea problemă:

Să se determine a, b, c astfel ca polinomul:

$$(m-2)x^m + a x^{m-1} + b x + c,$$

să fie divizibil cu $(x-1)^3$. *Fie* $P(x)$ *polinomul găsit. Se cere câtul lui* $P(x)$ *prin* $(x-1)^3$.

Să se găsească numărul rădăcinelor reale ale acestui cât.

TH. ANGHELUTA

Voesc a determina pe *a, b, c* astfel ca polinomul dat, să se dividă prin $(x-1)^3$, precum şi câtul împărţirii lui $P(x)$ prin $(x-1)^3$, printr'o metodă directă, diferită de cea dată în „G. M".

Pentru aceasta folosesc rezultatele din articolul meu din „R. M. T.", anul XIII, Mai 1933, intitulat: *Expresiunile restului şi câtului împărţirei a două polinoame.*

Formulele (10′) din articolul menţionat scriu condiţiile ca un polinom de forma:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p,$$

să se dividă prin $(a-x)^q$, iar formula (17) ne dă câtul împărţirei lor.

Aceste formule, când împărţitorul este $(x-a)^q$, sunt:

$$a_0 = (-1)^q \sum_{i=0}^{p-p} I_q^i \, a_{q+i} \, a^{q+i}$$

$$a_1 = (-1)^{q-1} \sum_{i=0}^{p-q} I_2^{q+i-1} \, I_{q-1}^i \, a_{q+i} \, a^{q+i-1}$$

$$(1) \qquad a_2 = (-1)^{q-2} \sum_{i=0}^{p-q} I_3^{q+i-2} \, I_{q-2}^i \, a_{q+i} \, a^{q+i-2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{q-2} = \sum_{i=0}^{p-q} I_{q-1}^{i+2} \, I_2^1 \, a_{q+i} \, a^{i+2}$$

$$a_{q-1} = -\sum_{i=0}^{p-q} I_q^{i+1} \, a_{q+i} \, a^{i+1} \, ,$$

iar câtul este:

$$(2) \qquad Q(x) = \sum_{k=0}^{p-q} (a_{q+k} + \Gamma_q^1 \, a_{q+k+1} \, a + \Gamma_q^2 \, a_{q+k+2} \, a^2 + \cdots I_q^{p-q-k} \, a_p \, a^{p-q-k}) \, x^k \, ,$$

unde:

$$I_m^n = \frac{m(m+1)\cdots(m+n-1)}{n!} \, .$$

Dacă luăm:

$p = m$, $q = 3$, $a = 1$, $a_0 = c$, $a_1 = b$, $a_2 = a_3 = \cdots = a_{m-2} = 0$, $a_{m-1} = a$, $a_m = m - 2$

avem problema de mai sus.

In acest caz primele trei formule din (1) şi formula (2), devin:

$$(3) \quad \begin{cases} c = -\sum_{i=0}^{m-3} I_3^i \, a_{3+i} = -I_3^{m-4} \, a - I_3^{m-3} (m-2) = -\frac{(m-3)(m-2)}{2} \, a - \frac{(m-2)^2 (m-1)}{2} \\ b = \sum_{i=0}^{m-3} I_2^{i+2} \, I_2^i \, a_{3+i} = I_2^{m-2} \, I_2^{m-4} \, a + I_2^{m-1} \, I_2^{m-3} (m-2) = (m-1)(m-3) \, a + m(m-2)^2 \\ 0 = -\frac{(m-2)(m-1)}{2} \, a - \frac{(m-1) \, m \, (m-2)}{2} \end{cases}$$

$$(4) \qquad Q(x) = \sum_{k=0}^{m-3} [I_3^{m-4-k} \, a + I_3^{m-3-k} (m-2)] \, x^k = \sum_{k=0}^{m-3} \left[\frac{(m-3-k)(m-2-k)}{2} \, a + \frac{(m-2-k)(m-1-k)}{2} (m-2) \right] x^k .$$

Din relaţia 3-a din (3) deducem:

$$a = -m \, .$$

Această valoare introdusă în primele două relaţii din (3) precum şi în formula (4), ne dau:

$$c = \frac{(m-3)(m-2)\,m}{2} - \frac{(m-2)^2 (m-1)}{2} = \frac{(m-2)(m^2 - 3m - m^2 + 3m - 2)}{2} = -m + 2$$

$$b = -m(m-1)(m-3) + m(m-2)^2 = -m(m^2 - 4m + 3 - m^2 + 4m - 4) = m$$

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{m-3} \frac{-m(m-3-k)(m-2-k) + (m-2)(m-2-k)(m-1-k)}{2} \, x^k =$$

$$\sum_{k=0}^{m-3} \frac{(m-2-k)(-m^2 + 3m + km + m^2 - m - km - 2m + 2 + 2k)}{2} \, x^k = \sum_{k=0}^{m-3} (m-2-k)(k+1) \, x^k \, .$$

Aşa dar condiţiile ca polinomul:

$$P(x) = (m-2) \, x^m + a \, x^{m-1} + b \, x + c \, ,$$

să se dividă pin $(x-1)^3$, sunt:

$$a = -m, \quad b = m, \quad c = -m + 2 \, ,$$

iar câtul lui $P(x)$ prin $(x-1)^3$ este:

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{m-3} (m-2-k)(k+1) \, x^k \, ,$$

care este un polinom reciproc.

Prin metoda expusă aci, vedem că am determinat automat, condiţiile de divizibilitate, precum şi expresiunea câtului, fără a fi nevoie a afla căturile intermediare $P_1(x)$ şi $P_2(x)$.

V. ALACI

13. — *Asupra unui proces de abstractizare.* După *Ribot,* sunt trei perioade în formaţia ideii de număr: perioada concretă, perioada concretă-abstractă şi perioada abstractă.

Am arătat cu altă ocazie, cu exemplificări interpretative, în ce constă evoluţia numărului în primele două perioade: concretă şi concretă-abstractă. Trecerea dela aceasta din urmă la perioada abstactă (în care are loc constituirea arimeticei ca ştiinţă) s'a făcut într'un timp îndelungat, de secole. Aceasta, din punct de vedere istoric. Privită ca un fenomen de psihologie a raţionamentului, această evoluţie către complecta abstractizare se efectuiază la copii, în zilele noastre, prin instrucţie, în câţiva ani. In şcoli, predarea aritmeticei are drept scop şi reuşeşte să imprime în mintea copilului, tocmai această noţiune generală de număr, prin intermediul calculelor la cari el se pretează. E de remarcat că există în predarea aritmeticei în cursul primar, o corespondenţă biunivocă: între obiectul aritmeticei şi evoluţia noţiunii de număr, Preocupările aritmeticei şi obiectul ei sunt asimilate numai cu concursul unei înţelegeri a noţiunii abstracte de număr; şi învers, numărul abstract nu poate fi conceput decât în urma unor numeroase şi metodice operaţiuni de calcul aritmetic.

Una din aceste operaţiuni simple este numărătoarea, adică înşirarea numerelor (întregi) — verbală sau scrisă — într'o ordine, mai întâi crescândă şi apoi descrescândă. Numărătoarea poate dura oricât şi se poate continua oricât de mult am voi. O caracteristică a numărului abstract este următoarea: că dincolo de orice număr la care am ajunge numărând, există un altul. Că, prin urmare, şirul numerelor întregi poate fi prelungit oricât de mult; cu toate că, efectiv, acest lucru este o imposibilitate. Ceace voim să arătăm aci, este tocmai importanţa mare, pe care o are în crearea noţiunii abstracte de număr, acest conflict între limita posibilităţilor materiale de numărătoare şi conştiinţa unei generalizări ce se impune evident, fără să poată fi verificată empiric. (Din felul în care am privit dela început chestiunea, se vede limpede că nu poate fi vorba aici de a demonstra că şirul numerelor naturale este înfinit; ne interesează, nu demonstraţia abstractă, ci mecamismul psihologic ce rezidă la întuirea acestei demonstraţii; dealtfel e uşor de făcut remarca, foarte importantă, care se poate extinde şi altor cazuri, — aşa cum a arătat-o *H. Poincaré*, fără să fie aprobat de toţi, — că la baza demonstraţiei acestei propoziţii este întuiţia, care o precede şi rezolvă pe cale psihologică problema care numai mai târziu este înglobată în domeniul demonstraţiilor pur logice[1]). Ajungem să concepem şi să ne încredinţăm de existenţa unor numere cărora nu le-am spus niciodată pe nume. Adevărata abstractizare stă tocmai în întuirea acestui adevăr: ştiu că există un număr, cu toate că niciodată nu l-am întrebuinţat în vreo operaţie aritmetică, aşa încât să i se poată constata efectiv valoarea, adică suma unităţilor ce-l compun. Numărul astfel închipuit, constitue singura veritabilă abstracţie. Atâta timp cât ne-am mărgini la numerele cu cari am operat efectiv, chiar un timp îndelungat şi oricât de departe am fi dus şirul crescător, — am păstra în conştiinţă numai certitudinea *acelor numere*, nicidecum a *unui număr,* ca idee generalizatoare, abstractă. Numărul acesta îşi pierde atributul rangului său în şirul natural al numerelor crescătoare, devenind o fiinţă în sine; iar, tradus abstract matematic, — un simbol general. Din acest moment, inteligenţa matematică, uzând de noţiunea abstractă, ştie să o alipească şi primelor numere, ce până aci îi erau reprezentate prin semne cu totul particulare şi proprii fiecăruia din ele. In felul acesta se ajunge să se înglobeze în noţiunea abstractă oricare din ele, — fie că s'ar numi şase sau cincisprezece.

N. O. ZAHARIA

---

[1]) Profităm de această ocazie pentru a declara că aderăm în totul afirmaţiei: „... Et moi, je serai conduit à répondre qu'il n'y a pas de logique d'épitémologie indépendantes de la psychologic" *(H. Poincaré, Dernières pensées).*

CHESTIUNI DE EXAMEN ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA

Anul pregătitor, Martie 1933.

ALGEBRĂ.

I.

1°. Să se verifice că funcţiunea:

$$y = \text{Arc sin}\sqrt{2 - x^2}$$

este definită pentru valori ale lui x satisfăcând una din condiţiile următoare:

$$1 \leqq x \leqq \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2} \leqq x \leqq -1 .$$

şi să i se calculeze derivata.

2°. Să se calculeze şi derivata funcţiunii:

$$z = \frac{1}{2}\,\text{Arc tg}\,2\,\frac{\sqrt{(2-x^2)(x^2-1)}}{2x^2-3}$$

şi din compararea celor două derivate să se verifice că:

$$y - z = C^{te}.$$

II.

1°. Să se găsească limita exprisiunii:

$$E = \left(\frac{n-a}{n+a}\right)^{n^2}_{n \to +\infty}$$

în cazurile $a > 0$ şi $a < 0$.

2°. Să se deducă de aci că seria cu termenul general:

$$u_n = \left(\frac{n-a}{n+a}\right)^{n^2}$$

nu poate fi convergentă, dacă $a < 0$.

3°. Să se studieze natura seriei precedentă, când $a > 0$.

III.

Să se rezolve şi discute sistemul linear neomogen:

$$a x + y + z = a$$

$$x + (a+1)\,y + 3\,z = a^2$$

$$x + 5\,y + (a-1)\,z = a^2 .$$

Anul pregătitor, Iunie 1933.

ALGEBRĂ.

I.

Se dă funcţia:

$$L\,y = +\sqrt{1 - (L\,x)^2} \qquad (L = \log.\ \text{nep.})$$

1. Între ce limite trebue să rămână cuprins x pentru ca funcţia dată se fie definită.

2. Să se studieze variaţia funcţii date şi să se construiască diagrama ei.

3. Să se determine coordonatele punctului de intersecţie al curbei precedente cu prima bisectoare ($y = x$) a axelor de coordonate. Să se determine coeficientul unghiular al tangentei la curbă în punctul considerat şi în urmă unghiul ce'l formează cu axa ox.

II.

1. Să se stabiliască convergenţa seriei:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2-1)\,(n^2-4)}$$

şi să se calculeze suma ei S.

2. S fiind găsit se consideră ecuaţia:

$$f(x) = x^3 + 9\,S\,x + 1 = 0$$

să se studieze natura rădăcinilor ei cu ajutorul teoremei lui *Rolle*.

3. Să se calculeze cu aprox. de $\frac{1}{10^2}$ rădăcina reală a ecuaţiei date.

III

1. Să se enunţe şi demonstre criteriile de convergenţă *D'Alembert* şi *Cauchy*.

2. Să se arăte că dacă l şi λ sunt limitele obţinute prin aplicarea celor două criterii aceleaşi serii ( ), atunci: $l = \lambda$

3. Să se deducă de aci că:

$$\lim \sqrt[n]{f(n)}_{n \to +\infty} = \lim \frac{f(n+1)}{f(n)}$$

unde $f(n)$ este o funcţie de n. Să se aplice relaţia precedentă la determinarea:

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n!}{(a+n)^n}}_{n \to +\infty}$$

şi să se deducă natura seriei cu termenul general:

$$u_n = \frac{n!}{(a+n)^n} .$$

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXIII, N-rile: 11—12, Iulie şi August 1933. Construction de la normale aux courbes de *Lamé* d'indices entiers, par *R. Goormaghtigh*. Sur les cercles tangents à trois cercles, par *V. Thébault*. Învăţământul aritmeticii în liceele noastre, (urmare), în N-rile 11 şi 12, de *I. Ionescu*. Asupra curbelor de gradul IV, de *Gh. Th. Gheorghiu*.

2. *Boletin Matematico*, Ano IV, Nr. 4, Junio de 1933, Buenos Aires, fundado y publicado por *Dr. Bernardo I. Baidaff*. Notaţiuni usuale în triunghiuri (pentru redactare).

3. *Rodolphe Raclis*. Trois théorèmes sur la série de *Taylor*. (Extrait des Actes du Congrès International des Mathématiciens, Zürich 1932.)

4. *Rodolphe Raclis*. Le terme Reste de la série de *Taylor* généralisée. (Extrait des Actes du Congrès International des Mathématiciens, Zürich 1932).

5. *N. G. Botea*. Proprietăţi ale triunghiului. (Extras din „Gazeta Matematică", Anul XXXVIII, N-rile: 6, 7, 8 şi 10, 1933.

6 *N. G. Botea*. Deux théorèmes sur le triangle. (Extrait des Comptes rendus du Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences, Bruxelles 1932).

7. *N. G. Botea*. Sur les fonctions holomorghes. (Extrait des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences).

8. *N. G. Botea*. Sur la configuration formée par deux triangles et deux points. (Extrait de „Mathesis, Tome XLVII, Mai 1933).

PROBLEME REZOLVATE

917 — *Să se demonstreze că suma:*

$$n^n - \frac{n}{1}(n-1)^n + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-2)^n -$$

$$\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}(n-3)^n + \cdots \pm n$$

este egală cu n!

In demonstrație nu se va face uz de cunoașterea identității:

$$x^n - C_n^1(x-1)^n + C_n^2(n-2)^n - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^n C_n^n (x-n)^n \equiv n!$$

enunțată, dar nedemonstrată, în „Cours d'Algèbre" par B. Niewenglowski, quatrième édition tome II, pagina 506.

COL. GH. BUICLIU

Avem identitatea:

$$e^{nx} C_n^1 e^{(n-1)x} + C_n^2 e^{(n-2)x} - \cdots$$

$$\cdots + (-1)^i C_n^i e^{(n-i)x} + \cdots + (-1)^n = (e^x - 1)^n.$$

Să derivăm de n ori ambii membrii ai identității. Primul membru are ca derivată de ordinul n pe:

$$\text{(I)} \qquad n^n e^{nx} - (n-1)^n C_n^1 e^{(n-1)x} +$$

$$(n-2)^n C_n^2 e^{(n-2)x} - \cdots + (-1)^i (n-i)^n C_n^i e^{(n-i)x} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} e^x.$$

Pentru membrul al doilea avem succesiv:

$$y = (e^x - 1)^n$$

$$y' = n(e^x - 1)^{n-1} e^x$$

$$y^{(2)} = n(n-1)(e^x - 1)^{n-2} e^{2x} + n(e^x - 1)^{n-1} e^x$$

$$y^{(3)} = n(n-1)(n-2)(e^x - 1)^{n-3} e^{3x} +$$

$$2(n-1)n(e^x - 1)^{n-2} e^{2x} + n(n-1)(e^x - 1)^{n-2} e^{2x}$$

$$+ n(e^x - 1)^{n-1} e^x$$

$$y^{(3)} = n(n-1)(n-2)(e^x - 1)^{n-3} e^{3x} +$$

$$3n(n-1)(e^x - 1)^{n-2} e^{2x} + n(e^x - 1)^{n-1} e^x$$

și din aproape în aproape se găsește că $y^{(i)}$ este egal cu o sumă în care primul termen este:

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)(e^x - 1)^{n-i} e^{ix},$$

iar restul termenelor se poate pune sub forma:

$$(e^x - 1)S'$$

în care S' este o sumă așa că:

$$\text{(II)} \qquad y^{(i)} = n(n-1)(n-2)\cdots$$

$$(n-i+1)(e^x - 1)^{n-i} e^{ix} + (e^x - 1)S$$

Dacă în (I) și (II) se face i egal cu n și apoi anulăm pe x și egalăm rezultatele, se obține:

$$n^n - (n-1)^n C_n^1 + (n-2)^n C_n^2 - (n-3)^n C_n^3 + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} = n!$$

care se mai poate scrie sub forma:

$$n^n - \frac{n}{1}(n-1)^n + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}(n-2)^n - \cdots = n!$$

adică ceea ce era de demonstrat.

Soluție dată de d-l *M. Marșieu* (Șc. Politecnică din Timișoara).

D-nii *I. C. Savin* și *I. C. Cristescu* (Sublocotenenți din Artilerie) au dat soluții sprijinite pe teorema creșterilor finite, însă soluțiile d-lor sunt lipsite de rigoare.

1005. — *Să se găsească numerele întregi M, N, P, Q, R, S de câte trei cifre fie-care și numărul A de șase cifre, care să satisfacă simultan următoarele șase egalități:*

$$A = MN \quad ; \quad 2A = PQ \quad ; \quad 3A = RS$$

$$6A = NM \quad ; \quad 5A = QP \quad ; \quad 4A = SR$$

în care MN,... înseamnă numărul ce se obține scriind pe N după M.

COL. GH BUICLIU

M și N fiind numere de câte 3 cifre avem:

$$A = 1000M + N$$

$$6A = 1000N + M.$$

Eliminând pe A între aceste egalități se găsește:

$$1000N + M = 6000M + 6N$$

$$991N = 5999M$$

$$142N = 857M.$$

* * *

Cum 142 şi 857 sunt prime între ele, urmează că M şi N sunt echimultipli ai acestor numere, dar singurul multiplu de 3 cifre al lui 857 este 857 deci:

$$N = 857 \quad ; \quad M = 142$$

şi atunci:

$$A = 142857 .$$

Ca verificare:

$$6\,A = 857142 .$$

Celelalte 4 numere P, Q, R, S se pot găsi pe aceiaşi cale, sau înmulţind pe A succesiv cu 2, 5, 3, 4. Avem:

$$2\,A = 285714 \quad ; \quad 3\,A = 428571$$

$$5\,A = 714285 \quad ; \quad 4\,A = 571428$$

Numerile A, M, N, P, Q, R, S se scriu cu aceleaşi cifre.

Au rezolvat foarte bine problema pe această cale d-şoara *Roşca St. Veronica* (lic. Internat, Craiova) şi d-nii *Boeriu Val.* (Şc Politecnică, Timişoara), *Margulius M.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Motoc D. M.* (lic. Olteniţa), *Pop Leontin* (Şc. Politecnică, Timişoara), *Popescu N. Petre* (student, Bucureşti), *Purcel At.* (Şc. Polit., Timişoara), *Purdilă A.* (Braşov).

D-nii *Mihăileanu N. N.* şi *Rusu D. C.* (Constanţa) au găsit soluţiile exact punând:

$$A = a\,b\,c\,d\,e\,f$$

şi căutând să determine cifrele $a, b, \ldots$ pe o cale mai greoaie.

D-nii *Cristopol C. I.* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Nicolaescu Stelian* (lic. R.-Vâlcea) au dat soluţiile exacte, fără a arăta cum le-au găsit.

Un corespondent care semnează *N. M.*, fără a rezolva problema, anunţă că în *The American Mathematical Monthly* (1927—33), *Robert E. Moritz* dă ca curiozitate aritmetică proprietatea numărului 142857 ai cărui multipli de 2, 3, 4, 5, 6 se obţin prin permutarea cifrelor.

Tot *N. M.* înştiinţează că o proprietate analoagă există pentru produsele numerelor:

2497 şi 1861035

respectiv cu 2, 4, 3, 1 şi 5, 4, 6, 12, 3, 1 în sistemul duodecimal, publicată în *Mathesis*, 1927—75, nota 9.

Gh. B.

1101. — *Dacă q este un întreg mai mare de cât 3, să se stabilească identitatea:*

$$\begin{vmatrix} \Gamma_3^q & \Gamma_3^{q-1} & \Gamma_3^{q-2} \\ \Gamma_3^{q-1} & \Gamma_3^{q-2} & \Gamma_3^{q-3} \\ \Gamma_3^{q-2} & \Gamma_3^{q-3} & \Gamma_3^{q-4} \end{vmatrix} = -1 ,$$

ştiind că Γ_p^i înseamnă combinări cu repetiţie a p obiecte luate câte i.

V. ALACI

Ţinând seamă că:

$$\Gamma_3^q = \frac{3\,4 \ldots (q+2)}{q\,!} = \frac{(q+1)(q+2)}{2} ,$$

$$\Gamma_3^{q-1} = \frac{q(q+1)}{2} , \quad \Gamma_3^{q-2} = \frac{(q-1)q}{2} ,$$

$$\Gamma_3^{q-2} = \frac{(q-2)(q-1)}{2} ,$$

$$\Gamma_q^{q-4} = \frac{(q-3)(q-2)}{2} ,$$

primul membru al identităţii date pe care să'l notăm cu Δ, se poate scri:

$$\Delta = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} (q+1)(q+2) & q(q+1) & (q-1)q \\ q(q+1) & (q-1)q & (q-1)(q-2) \\ (q-1)q & (q-1)(q-2) & (q-2)(q-3) \end{vmatrix}$$

Dacă scădem elementele coloanei a 2-a din elementele celoralte coloane, obţinem:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} q+1 & q(q+1) & -q \\ q & (q-1)q & -(q-1) \\ q-1 & (q-1)(q-2) & -(q-2) \end{vmatrix}$$

Adunând elementele coloanei a 3-a la elementele celorlalte două şi schimbând între ele ultimele două coloane, avem:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & q & q^2 \\ 1 & q-1 & (q-1)^2 \\ 1 & q-2 & (q-2)^2 \end{vmatrix}$$

Acesta este un determinant *Vandermonde*, care dezvoltat după regula cunoscută, ne dă:

$$\Delta = \frac{1}{2}(q-1-q)(q-2-q)(q-2-q+1) = -1.$$

Identitatea cerută este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Chiriac I. C-tin* (lic. Milit, Iaşi), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit., de Artilerie), *Lupescu G. C.* (Roman), *Motoc D. Mircea* (Olteniţa), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila) şi *Popa Gh. Ioan* (Olteniţa).

1136. — I_a, I_b, I_c *fiind porţiunile de înălţimi cuprinse respectiv între vârfurile şi ortocentru unui triunghiu, să se stabilească identitatea:*

$$\frac{I_a^n + I_b^n + I_c^n}{2^n R^n} = \cos^n A + \cos^n B + \cos^n C$$

celelalte notaţii fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

SUB-LT. MARIN P. TICA

Se cunosc relaţiile:

$I_a = 2R\cos A$, $I_b = 2R\cos B$, $I_c = 2R\cos C$.

(Compléments de Trigonometrie, par „F. G. M", pag. 182.)

Ridicând la puterea n^a aceste relaţii şi adunându-le, avem:

$$I_a^n + I_b^n + I_c^n = 2^n R^n (\cos^n A + \cos^n B + \cos^n C)$$

$$\frac{I_a^n + I_b^n + I_c^n}{2^n R^n} = \cos^n A + \cos^n B + \cos^n C.$$

* * *

Soluţii date de d-ra: *Antoniu V Emilia* (lic. Oltea Doamnă, Iaşi) şi de d-nii: *Cazanacli P.* (Iaşi) *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Chiriac C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Cojocaru M.* (lic. Milit, Craiova), *Curchi Ioan* (student, Bucureşti), *Ghiocel V. Vasile* (lic. Giurgiu), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Iaşi), *Ionescu C. Emil* (bacalaureat), *Ivănescu Cezar* (bacalaureat, Bârlad), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Margulius Marius* (Bucureşti), *Marteş V. Grigore* (lic. Milit., Chişinău), *Mazilu P., Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Păunescu N.* (lic. Milit., Craiova), *Păslariu Vasile* (lic. Bârlad), *Popa B. Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Popa Gh. Ioan* (Bucureşti), *Popa D. Traian*, *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit, Craiova), *Predoescu D. Marin* (lic. Buzeşti, Craiova), *Predoescu Traian* (lic. Milit, Craiova), *Sâmbotin Gheorghe* (Sub-Lt.), *Şuşală I. Gh.* (lic. Milit., Chişinău), *Süli Mihai* (Şc. Polit., Timişoara), *Trică S. Ion* (Caransebeş), *Tutunaru Gr. D-tru* (Şc. Milit., de Artilerie) şi *Vasiliu-Leoben Gh.* (Ing.)

1151. — *Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu A B C, să se stabilească relaţia:*

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = (4R + r)^2 - 2p^2$$

SUB.-LT. IOAN C. SAVIN

Ţinând seamă de relaţiile cunoscute:

$r_a + r_b + r_c - r = 4R$, $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$

(Compléments de Trigonométrie, par „F. G. M", pag. 178 şi 175)

putem scri evident:

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = (r_a + r_b + r_c)^2 -$$

$$2(r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a) = (4R + r)^2 - 2p^2$$

Astfel relaţia dată este stabilită.

Soluţii date de d-rele: *Antoniu V. Emilia* (lic. Oltea Doamnă, Iaşi), *Roşca Şt. Veronica* (Craiova) şi de d-nii: *Băleanu D-tru* (Şc. Milit. de Artilerie), *Bileţchi Mircea* (Şc. Polit., Timişoara), *Carp Ignat* (Sub.-Lt.), *Chiriac C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Chiriţă Mihail* (lic. Milit, Craiova), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Codreş Florian* (Sub-Lt), *Cojocaru M. V.* (lic. Milit., Craiova), *Constantin G. Petre* (lic Milit., Tg-Mureş), *Cosorlui Ştefan* (lic. Milit, Chişinău), *Curchi Ioan* (student, Bucureşti), *Dima A. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Dobos Ernest* (student, Cluj), *Ghiocel V. Vasile* (lic. Giurgiu), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Mazilu Panait* (lic. Internat, Iaşi), *Mehedinţi D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Mereuţă-Neamţ Emilian*, *Negrea A. Leonte-Mircea* (licenţiat în Matematici), *Nenciulescu H.* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Porumbescu D.* (Tg-Ocna), *Predoescu I. Marin* (lic. Buzeşti, Craiova), *Predoescu Traian* (lic. Milit., Craiova), *Ragalschi Eugen* (lic. Milit, Chişinău), *Sandovici Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Săndulescu I. Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Sâmbotin Gh.* (Sub-Lt.) *Stănescu M. Emil* (lic. Milit., Craiova), *Süli Mihai* (Şc. Polit., Timişoara), *Şuşală I, Gh.* (lic. Milit., Chişinău), *Theoharide Lucian* (Şc Preg. de Ofiţeri), *Tica P. Marin* (Sub-Lt), *Trică Ioan* (Caransebeş), *Tutunaru D-tru* (Şc. Milit. de Artilerie) şi *Vasiliu-Leoben Gh.* (Inginer).

1152. — *Să se arate că:*

$$\frac{h_a h_b h_c}{(h_c - h_a)(h_c - h_b)(h_b - h_a)} =$$

$$\frac{\sin A \sin B \sin C}{(\sin A - \sin B)(\sin A - \sin C)(\sin B - \sin C)},$$

unde A, B, C *şi* h_a, h_b, h_c, *sunt unghiurile şi înălţimele unui triunghiu* A B C.

ION MARGINEANU

Ţinând seamă că în orice triunghiu avem:

$$h_a = b\sin C, \qquad h_c = b\sin A,$$

deducem:

$$(1) \quad \frac{h_a}{h_c - h_a} = \frac{b\sin C}{b\sin A - b\sin C} = \frac{\sin C}{\sin A - \sin C}$$

Analog, obţinem prin permutări circulare:

$$(2) \quad \frac{h_b}{h_a - h_b} = \frac{\sin A}{\sin B - \sin A}$$

$$(3) \quad \frac{h_c}{h_b - h_c} = \frac{\sin B}{\sin C - \sin B}$$

Multiplicând relaţiile (1), (2), (3), obţinem:

$$\frac{h_a\, h_b\, h_c}{(h_c - h_a)\,(h_a - h_b)\,(h_b - h_c)} =$$

$$\frac{\sin A \sin B \sin C}{(\sin A - \sin C)\,(\sin B - \sin A)\,(\sin C - \sin B)},$$

sau:

$$\frac{h_a\, h_b\, h_c}{(h_c - h_a)\,(h_c - h_b)\,(h_b - h_a)} =$$

$$\frac{\sin A \sin B \sin C}{(\sin A - \sin B)\,(\sin A - \sin C)\,(\sin B - \sin C)},$$

care este tocmai relaţia cerută.

Soluţii date de d-rele: *Antoniu V. Emilia* (lic. Oltea Doamnă, Iaşi), *Roşca Şt. Veronica* (Craiova) şi de d-nii *Anastasescu Mihai* (bacalaureat, Târgovistea), *Arbter Emil* (lic. Beiuş), *Bileţchi Mircea* (Şc. Polit., Timişoara), *Carp Ignat* (Sub-Lt.), *Chiriac C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Chiriţă Mihail* (lic. Milit., Craiova), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit, Craiova), *Cojocaru M. Marin* (lic. Milit., Craiova) *Cosorlui Ştefan* (lic. Milit, Chişinău), *Curchi Ioan* (student, Bucureşti), *Deniş C-tin* (lic. Roman), *Dima A. Gheorghe* (Şc Polit, Timişoara), *Doboş Ernest* (student, Cluj), *Ghiocel V. Vasile* (lic. Giurgiu), *Godeanu Ig. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Grumăzescu Mircea* (lic. Internat, Iaşi), *Hascal I. Herman* (lic. Roman), *Ilie C. Ioan* (lic Milit., Tg-Mureş), *Ionescu C. Emil* (bacalaureat, Craiova), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit., de Artilerie), *Marteş V. Grigore* (lic. Milit., Chişinău), *Mazilu Panaite* (lic. Internat, Iaşi), *Maşcaş Petru* (Beiuş), *Mehedinţi D. D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Negrea A. Leonte-Mircea* (licenţiat în Matematici), *Nenciulescu H.* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Păslariu Vasile* (lic. Codreanu, Bârlad), *Popa B. Ioan* (Şc. Polit., Timisoara), *Porumbescu D.* (Tg-Ocna), *Predoescu I Marin* (bacalaureat, Craiova), *Predoescu Traian* (lic. Milit., Craiova), *Ragalschi Eugen* (lic. Milit, Chişinău), *Sandovici Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Santto F. Georges* (lic. Internat, Iaşi), *Sâmbotin Gh.* (Sub-Lt.), *Săndulescu I. Ioan* (Şc. Polit, Timişoara), *Stern M. Nicolaie* (lic. Beiuş), *Stoica G. I.* (Sub-Lt), *Süli Mihai* (Şc. Polit., Timişoara), *Şuşula I. Gheorghe* (lic Milit, Chişinău), *Tica Petre Marin* (Craiova), *Trică Ioan* (Caransebeş) şi *Vasiliu-Leoben Gh.* (Inginer).

PROBLEME PROPUSE

1225. — Parmi les nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, pris une fois, trouver six d'entre eux dont la somme divise celle de leurs cubes.

V. THÉBAULT

1226. — Pentru ce valori întregi şi positive date lui p, expresia:

$$E = 256^{p+1} + 4^{3p+4} + 3 \times 2^{4p+5} + 4^{p+2} + 1,$$

este divizibilă prin 25?

ION MARGINEANU

1227. — Să se afle care este patratul de forma $abcaad$, ştiind că c este număr prim, iar aab şi ad sunt patrate perfecte.

CORNELIA NANES

1228. — Proectând intersecţia diagonalelor unui patrulater inscriptibil pe laturi, se obţine un patrulater, ale cărui laturi opuse se întâlnesc pe diagonalele patrulaterului de referinţă.

CONSTANTIN IONESCU BUJOR

1229. — Se dă un patrulater inscriptibil ABCD. E punctul de intersecţie al diagonalelor. Să se arate că punctul de intersecţie al diagonalelor paralelogramului format prin unirea ortocentrelor celor patru triunghiuri cu vârfurile în E, punctul de intersecţie al diagonalelor paralelogramului format prin unirea mijloacelor laturilor lui ABCD şi centrul cercului circumscris lui ABCD, sunt colineare.

MIHAI M SÜLI

863*) — Să se rezolve în numere întregi ecuaţiunea:

$$4 + 81\,x^2 = 10\,y^2$$

COL. GH. BUICLIU

1230. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^3 - x\,y\,z = a \\ y^3 - x\,y\,z = b \\ z^3 - x\,y\,z = c \end{cases}$$

ADRIAN POPESCU

1231. — Să se formeze ecuaţiunea algebrică, care are rădăcinele:

$$x = \frac{\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n} + \operatorname{tg}\frac{2k\pi}{n}}{\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n} - 2\operatorname{tg}\frac{2k\pi}{n}},$$

$$k = 0, 1, 2, 3 \ldots (n-1).$$

V. ALACI

*) Problema 863 fiind eronat enunţată la pag. 108, vol. IX, se publică din nou rectificată.

INFORMAŢIUNI

ŞCOALA POLITEHNICĂ DIN TIMIŞOARA

PROSPECT

Organizaţiunea Şcoalei.

Şcoala Politehnică din Timişoara cuprinde două secţiuni:
a) Secţiunea de ingineri mecanici-electricieni.
b) Secţiunea de ingineri de mine.

Invăţământul se întinde pe durata de cinci ani: un an preparator şi patru ani de studii, după cari absolventul obţine diploma de inginer, în specialitatea pe care şi-a ales-o.

Admiterea studenţilor.

Admiterea şi matricularea studenţilor se face în anul preparator al şcolii pe baza unui examen de admitere ce se ţine la 23 Octombrie 1933 ora 8 dim. în Timişoara. Şcoala Politehnică, str. Tunari No. 2.

Inscrierea la acest examen se face printr'o cerere (model); timbrată, adresată Direcţiunii Şcoalei însoţită de următoarele acte în original:

a) actul de naştere,
b) un certificat medical despre sănătatea candidatului, constatând că nu sufere de nicio infirmitate.
c) diploma de bacalaureat a liceului,

Diplomele şcolilor străine vor trebui să fie echivalate de Ministerul Instrucţiunii,

d) două fotografii (format 6×9 cm.), semnate.

Examenul de admitere se face în scris şi oral, în faţa unei comisiuni, sub preşedinţia rectorului şcoalei.

Cererile de înscriere pentru examen se primesc la cancelaria şcolii până la 21 Octombrie 1933.

Candidaţii reuşiţi la examen vor fi înmatriculaţi în anul preparator al şcoalei.

Studenţii Şcolilor Politehnice străine pot fi admişi şi în anii I., II. sau III., pe baza unui examen de diferenţă, care va fi hotărît de Comitetul de Direcţiune.

Taxe.

Taxa de înscriere şi pentru examenul de admitere în şcoală, e de 500 lei. Această taxă se achită înainte de închiderea înscrierilor şi nimeni nu poate fi scutit de ea.

Taxa de diferenţă e de 500 lei.

Programul examenului de admitere.

1. Probă scrisă şi orală Aritmetică,
2. Probă scrisă şi orală Geometriea plană şi în spaţiu,
3. Probă scrisă şi orală Algebră şi Trigonometrie.

Programul cunoştinţelor din cari se dau aceste probe e programul de liceu, publicat în Monitorul Oficial No. 96 din 3 Mai 1929.

DIRECŢIUNEA

LA REDACŢIA „REVISTEI MATEMATICE DIN TIMIŞOARA SE PRIMESC ABONAMENTE PENTRU ANUL AL V-LEA (MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)

DE BOLETIN MATEMATICO

COSTUL UNUI ABONAMENT FIIND DE 300 LEI ŞI PENTRU ANUL AL III-LEA (MARTIE 1932 — FEBRUARIE 1933)

DE BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL

COSTUL ABONAMENTULUI FIIND DE 125 LEI, PUBLICATE ÎN BUENOS AIRES; AMĂNDOUĂ 400 LEI

Legându-se colecţia R. M. T., anul IX, în volum şi rămânând numere răzleţe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenţilor noştri numere care eventual le lipsesc din colecţie în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administraţiei revistei, trimiţând suma prin mandat poştal.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie şi însoţite de enunţ. Problemele propuse trebuesc însoţite şi de soluţiile lor.

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată de el, şi s'o iscălească.

Abonamentul pe anul XIII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

şi se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Şcoala Politechnică din Timişoara.

ANUL XIII. 15 OCTOMBRIE 1933 NO 8.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. M. V. THÉBAULT: SUR UN THÉORÈME DE SCHRÖTER.
2. CONST IONESCU BUJOR ASUPRA UNOR TRIUNGHIURI PODARE SI ANTIPODARE.
3. NOTE MATEMATICE: 14, 15, 16
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 889, 1084, 1099, 1100, 1123, 1137.
6. PROBLEME PROPUSE: 1232-1239.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Artegrafice „Tipografia Românească"

Avem plăcerea a anunța că începând dela 15 Septemvrie 1933, mai face parte dintre membrii „Revistei Matematice din Timișoara“ și D-l *Virgil Claudian,* licențiat în matematici, profesor la Școala Normală din Galați, fost corespondent distins al „Revistei“.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui Prof **C. Teodorescu**, Școala Politechnică din Timișoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timișoara“ este pentru anul XIII, de 200 (două sute) lei.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XII inclusiv, broșate, 120 lei fiecare

---

ANUL XIII — No 8. TIMISOARA, 15 OCTOMBRIE 1933

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie.

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

SUR UN THÉORÈME DE SCHRÖTER

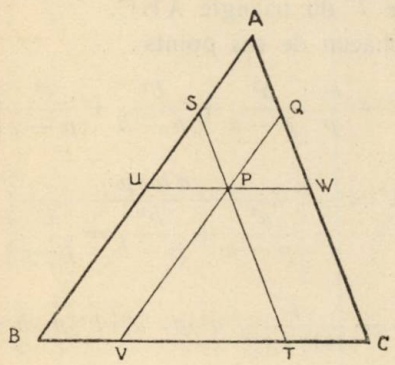
PAR

M V. THÉBAULT

LE MANS (FRANCE)

1. *Notations.* Soient un triangle A B C, (B C = a, C A = b, A B = c), (O), (I), les cercles circonscrit et inscrit, R, r, leurs rayons; G, K, le centre de gravité et le point de *Lemoine*.

Dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1878 p. 430, *Schröter* a énoncé ce théorème: *D'un point* P *du plan, on mène les parallèles aux côtés d'un triangle* A B C, *qui rencontrent respectivement les deux autres côtés en* U et W, Q et V, S et T.



La somme:

$$PU\cdot PW+PQ\cdot PV+PS\cdot PT,$$

est égale à la puissance M *du point* P, *par rapport au cercle circonscrit au triangle.*[1])

2. L'emploi de ce théorème, souvent utile en *Géométrie du Triangle,* est facilité par l'introduction des coordonnées barycentriques.

Soient α, β, γ, les coordonnées barycentriques du point P et U, W, Q, V, S, T, les intersections des parallèles tracées de P à CB, BA, AC, avec BA et AC, AC et CB, CB et BA.

On obtient facilement:

$$\overline{PU}=\frac{a\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}, \qquad \overline{PW}=\frac{a\beta}{\alpha+\beta+\gamma},$$

d'où l'on tire:

$$\overline{PU}\cdot\overline{PW}=\left|\frac{a}{\alpha+\beta+\gamma}\right|^2\beta\gamma,$$

et, par analogie:

$$\overline{PS}\cdot\overline{PT}=\left|\frac{b}{\alpha+\beta+\gamma}\right|^2\gamma\alpha,$$

$$\overline{PQ}\cdot\overline{PV}=\left|\frac{c}{\alpha+\beta+\gamma}\right|^2\alpha\beta,$$

puis, en grandeur et en signe, la formule de *Schröter:*

$$(1)\quad M=\left|\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\right|^2\left|a^2\beta\gamma+b^2\gamma\alpha+c^2\alpha\beta\right|.$$

Pour le point $P_1\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}\right)$, *réciproque de* P:

$$(2)\quad \underset{1}{M}=\frac{\alpha\beta\gamma}{|\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta|^2}\left|a^2\alpha+b^2\beta+c^2\gamma\right|.$$

Pour le *conjugué isogonal* $P'\left(\frac{a^2}{\alpha},\frac{b^2}{\beta},\frac{c^2}{\gamma}\right)$ de P,

$$(3)\quad M'=\left|\frac{abc}{a^2\beta\gamma+b^2\gamma\alpha+c^2\alpha\beta}\right|^2\alpha\beta\gamma|\alpha+\beta+\gamma|.$$

On a, par exemple, cette relation pour deux points P, P′, conjugués isogonaux dans A B C:

$$(4)\quad M\,M'=\left|\frac{a^2b^2c^2}{a^2\beta\gamma+b^2\gamma\alpha+c^2\alpha\beta}\right|\cdot\left|\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right|.$$

3. *Cas particuliers.* 1°. Posons $\alpha=a^n$, $\beta=b^n$, $\gamma=c^n$.

[1]) Nous avons étendu ce théorème au tétraèdre, *Mathesis*, 1914, question 1984. *(V. T.)*

Ces expressions (1), (2), (3), deviennent:

$$(5)\qquad M=\left|\frac{abc}{a^n+b^n+c^n}\right|^2\cdot|b^{n-2}c^{n-2}+c^{n-2}a^{n-2}+a^{n-2}b^{n-2}|,$$

$$(6)\quad \underset{1}{M}=\frac{a^n b^n c^n}{|b^n c^n+c^n a^n+a^n b^n|^2}|a^{n+2}+b^{n+2}+c^{n+2}|,$$

$$(7)\quad M'=\frac{a^{n-2}b^{n-2}c^{n-2}}{|b^{n-2}c^{n-2}+c^{n-2}a^{n-2}+a^{n-2}b^{n-2}|^2}|a^n+b^n+c^n|.$$

2°. Lorsque $n=0$, $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$, le point P coincide avec G, I, K, un point M $(a^3, b^3 c^3)$ et le conjugué isogonal N (a^4, b^4, c^4), du centre d'homologie du triangle ABC avec son premier triangle de *Brocard*.

On a, pour chacun de ces points:

$$(8)\quad \underset{(G)}{M}=-\left|\frac{abc}{3}\right|^2\left|\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}+\frac{1}{a^2b^2}\right|=-\frac{a^2+b^2+c^2}{9}\Bigg|=\underset{1\,(G)}{M}.$$

$$(9)\quad \underset{(G)}{M'}=-\left|\frac{\dfrac{1}{a^2b^2c^2}}{\left|\dfrac{1}{b^2c^2}+\dfrac{1}{c^2a^2}+\dfrac{1}{a^2b^2}\right|^2}\right|=-\frac{3a^2b^2c^2}{|a^2+b^2+c^2|^2}=\underset{(K)}{M}.$$

$$(10)\quad \underset{(I)}{M}=-\left|\frac{abc}{a+b+c}\right|^2\left|\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}\right|=-2Rr=\underset{(I)}{M'}.$$

$$(11)\quad \underset{1\,(I)}{M}=-\frac{abc}{|bc+ca+ab|^2}|a^3+b^3+c^3|.$$

$$(12)\quad \underset{1\,(K)}{M}=-\frac{a^2b^2c^2}{|b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2|^2}|a^4+b^4+c^4|.$$

$$(13)\quad \underset{(M)}{M}=-\left|\frac{abc}{a^3+b^3+c^3}\right|^2|bc+ca+ab|.$$

$$(14)\quad \underset{1\,(M)}{M}=-\frac{a^3b^3c^3}{|b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3|^2}|a^5+b^5+c^5|.$$

$$(15)\quad \underset{(M)}{M'}=-\frac{abc}{|bc+ca+ab|^2}|a^3+b^3+c^3|.$$

$$(16)\quad \underset{(N)}{M}=-\left|\frac{abc}{a^4+b^4+c^4}\right|^2|b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2|.$$

$$(17)\quad \underset{1\,(N)}{M}=-\left|\frac{a^2b^2c^2}{|b^4c^4+c^4a^4+a^4b^4|}\right|^2|a^6+b^6+c^6|.$$

$$(18)\quad \underset{(N)}{M'}=-\frac{a^2b^2c^2}{|b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2|^2}|a^4+b^4+c^4|.$$

N. B. Si l'on observe que le *réciproque* P_1 d'un point P (a^n, b^n, c^n), en coordonnées barycentriques, coïncide avec le *conjugué isogonal* Q′ du point Q $(a^{n+2}, b^{n+2}, c^{n+3})$, l'identité des formules (11) et (15), (12) et (18) est à nouveau justifiée. On obtient aussi ces remarques:

Le réciproque du centre du cercle inscrit coïncide avec le conjugué isogonal du point P (a^2, b^2, c^2), *en coordonnées normales.*

Le réciproque du point de Lemoine coïncide avec le conjugué isogonal du centre d'homologie du triangle fondamental avec son premier triangle de Brocard.

3°. Si l'on pose $\alpha=p-a$, $\beta=p-b$, $\gamma=p-c$, puis $\alpha=1:(p-a)$, $\beta=1:(p-b)$, $\gamma=1:(p-c)$, le point P devient les points de *Nagel* V et de *Gergonne* Γ du triangle ABC.

Pour chacun de ces points:

$$(19)\quad \underset{(V)}{M}=-\frac{r^2}{p}\left|\frac{a^2}{p-a}+\frac{b^2}{p-b}+\frac{c^2}{p-c}\right|=\underset{1\,(\Gamma)}{M}.$$

$$(20)\quad \underset{(V)}{M'}=-\left|\frac{abcp}{\dfrac{a^2}{p-a}+\dfrac{b^2}{p-b}=\dfrac{c^2}{p-c}}\right|^2$$

$$(21)\quad \underset{(\Gamma)}{M}=-\frac{p}{|4R+r|^2}|a^2(p-a)+b^2(p-b)+c^2(p-c)|$$

$$(22)\quad \underset{(\Gamma)}{M'}=-r|4R+r|\cdot\left|\frac{abc}{a^2(p-a)+b^2(p-b)+c^2(p-c)}\right|^2.$$

4. On sait que les conjugués isogonaux des points V et Γ coïncident avec les centres de similitude externe et interne S_2 et S_1 des cercles inscrit et circonscrit au triangle.[1] De plus, en posant $OI=d$:

$$OS_2=\frac{dR}{R-r},\qquad OS_1=\frac{dR}{R+r}.$$

[1]) Cfr. par exemple, *V. Thébault, Mathesis* 1932 p 369.

Les puissances respectives des points S_2, S_1, par rapport au cercle (O) sont donc:

$$\underset{(S_2)}{M} = \overline{OS_2}^2 - R^2 = -\left|\frac{Rr}{R-r}\right|^2,$$

$$\underset{(S_1)}{M} = -\frac{R^2 r\,|4R+r|}{|R+r|^2}.$$

Par comparaison avec (20) et (21) on obtient ces relations peut êtrè nouvelles entre les éléments habituels du triangle:

$$\frac{a^2}{p-a}+\frac{b^2}{p-b}+\frac{c^2}{p-c}=\frac{4p(R-r)}{r},$$

$$a^2(p-a)+b^2(p-b)+c^2(p-c)=$$
$$4S|R+r|=4pr|R+r|.$$

ASUPRA UNOR TRIUNGHIURI PODARE ŞI ANTIPODARE

De

CONSTANTIN IONESCU BUJOR

Subiectul prezentului articol îl formează triunghiurile podare şi antipodare a două puncte simetrice în raport cu centrul cercului circumscris triu ghiului de referinţă.

1°. *„Fie M şi N două puncte în planul unui triunghiu, simetrice în raport cu centrul cercului său circumscris.*

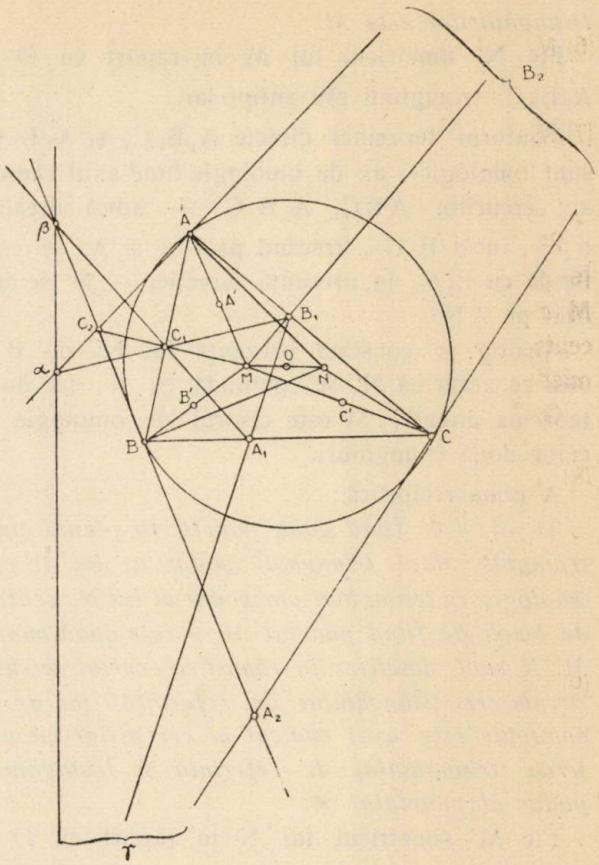
Triunghiul podar al punctului M este omologic cu triunghiul antipodar al punctului N, centru de omologie fiind M, iar ax de omologie fiind axul radical al cercurilor circumscrise triunghiului de referinţă şi triunghiului podar al lui M“.

Notaţii: ABC triunghiul de referinţă, O centrul cercului ABC, $A_1B_1C_1$ podarul lui M, $A_2B_2C_2$ antipodarul lui N; A', B', C' mijloacele segmentelor AM, BM, CM.

a). Dreapta B_2C_2, perpendiculară pe AN, e perpendiculară şi pe OA', este deci ax radical al cercurilor AC_1B_1, ABC — şi cum C_1B_1 e ax radical al cercurilor AC_1B_1, $A_1B_1C_1$ — prin α, intersecţia dreptelor C_1B_1, C_2B_2, deci centru radical al celor 3 cercuri considerate, trece axul radical al cercurilor ABC, $A_1B_1C_1$.

Analog, se vede că acest ax radical trece prin $\beta(C_1A_1,\ C_2A_2)$, $\gamma(A_1B_1,\ A_2B_2)$.

Triunghiurile $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ sunt astfel omologice, iar axul lor de omologie este axul radical al cercurilor ABC, $A_1B_1C_1$.



b). Revenind la observarea: C_2B_2 e ax radical al cercurilor AC_1B_1, ABC şi alăturându-i permutata ei circular: A_2C_2 e ax radical al cercurilor BA_1C_1, ABC — C_2 apare centru radical al acestor 3 cercuri, se află deci pe MC_1, axul radical al cercurilor AC_1B_1, BA_1C_1.

Analog, A_2, B_2 sunt respectiv pe MA_1, MB_1 — se atinge astfel concluzia urmărită:

M este centrul de omologie al celor două triunghiuri.

***

Reciprocele acestei teoreme sunt cu deosebire interesante:

2°. *M şi N fiind două puncte în planul unui triunghiu, dacă triunghiul podar al lui M este*

omologic cu triunghiul antipodar al lui N, ax de omologie fiind axul radical al cercurilor circumscrise triunghiului de referinţă şi triunghiului podar al punctului M — punctele sunt simetrice în raport cu centrul cercului circumscris triunghiului de referinţă, iar centrul de omologie al triunghiurilor este M.

Fie N′ simetricul lui M în raport cu O şi $A'_2 B'_2 C'_2$ triunghiul său antipodar.

Conform teoremei directe $A_1 B_1 C_1$ şi $A'_2 B'_2 C'_2$ sunt omologice, ax de omologie fiind axul radical al cercurilor A B C, $A_1 B_1 C_1$ — adică dreapta $\alpha\beta\gamma$; încât $B'_2 C'_2$, trecând prin α şi A, se confundă cu $B_2 C_2$ în privinţa direcţiei — N′ se află deci pe A N.

Analog se constată prezenţa lui N′ pe B N, ceia ce arată că N′ se confundă cu N; iar după teorema directă, M este centrul de omologie al celor două triunghiuri.

A doua reciprocă:

3°. *M şi N fiind două puncte în planul unui triunghiu, dacă triunghiul podar al lui M este omologic cu triunghiul antipodar al lui N, centrul de omologie fiind punctul M — cele două puncte M, N sunt simetrice în raport cu centrul cercului circumscris triunghiului de referinţă, iar ax de omologie este axul radical al cercurilor circumscrise triunghiului de referinţă şi triunghiului podar al punctului M.*

Fie M′ simetricul lui N în raport cu O şi $A'_1 B'_1 C'_1$ triunghiul său podar.

După teorema directă, triunghiurile $A'_1 B'_1 C'_1$ şi $A_2 B_2 C_2$ sunt omologice, centru de omologie fiind M′.

Urmează că dreapta $C_2 C'_1 M'$ e perpendiculară pe A B şi acelaş lucru, după ipoteză, se spune despre $C_2 C_1$ M. In consecinţă C_1 şi C'_1 se confundă, iar M′ este situat pe C_1 M.

Analog se dovedeşte că M′ e situat pe A_1 M — deci M′ este chiar M.

Conform teoremei directă, axul de omologie al celor două triunghiuri este axul radical al cercurilor circumscrise triunghiurilor A B C şi $A_1 B_1 C_1$.

***

Consecinţe: Pentru interesul şi simetria lor, sunt de semnalat următoarele două propoziţiuni, consecinţe ale teoremei şi reciprocelor ei:

4°. *Dacă triunghiul podar al punctului M şi triunghiul antipodar al punctului N sunt omologice, având centrul de omologie în M, atunci şi triunghiul podar al lui N e omologic cu triunghiul antipodar al lui M, centrul de omologie fiind N.*

5°. *Dacă triunghiul podar al punctului M şi triunghiul antipodar al punctului N sunt omologice, având drept ax de omologie axul radical al cercurilor circumscrise triunghiului de referinţă şi triunghiului podar al lui M, atunci şi triunghiul podar al lui N e omologic cu triunghiul antipodar al lui M, ax de omologie fiind axul radical al cercurilor circumscrise triunghiului de referinţă şi triunghiului podar al punctului N.*

NOTE MATEMATICE

14. — Jean le Rond d'Alembert.

In ziua de 29 Octombrie a c., se împlinesc 150 ani dela moartea lui *d'Alembert,* a cărui valoroasă activitate pe tărâmul filosofic, literar şi matematic, i-a făcut cunoscut numele şi marea lui operă.

E necesar ca, înainte de a aminti lucrările sale mai de seamă, să schiţez în câteva cuvinte vieaţa lui.

S'a născut în anul 1717, ca fiu natural al comisarului *Destouches,* care l-a aruncat îndată după naştere. Găsit pe treptele bisericii Saint Jean le Rond, a fost dus la un azil de copii găsiţi şi apoi încredinţat soţiei unui geamgiu, cu numele *Rousseau.* Arătând încă de mic excepţionale calităţi intelectuale a fost îndemnat de jansenişti, în colegiul cărora îşi făcea studiile, spre arte, drept şi mai ales spre matematici, în legătură cu care publică însemnate opere.

Ca literat numele lui *d'Alembert* rămâne legat de numeroasele lui lucrări: poezii, teatru, critică, dar mai ales de publicarea „Enciclopediei" la care a contribuit cu revederea articolelor matematice, cu redactarea acelui „Discours préliminaire" precum şi a altor vestite articole de critică sau filosofie. De tânăr încă, el urcă treptele stălucitoare ale gloriei: în 1754 este ales membru al Academiei franceze; apoi: membru al institului din Bologne; asociat al Academiei de litere din Suedia; *Frede-*

ric II îl cinsteşte cu corespondenţa sa ; *Catarina II-a* a Rusiei îl numeşte guvernor al Marelui Duce moştenitor.

Din mulţimea de opere citez doar câteva: „*Études de philosophie*“ ; „*Le systéme du monde*“ ; „*Corespondance litteraire*“ ; „*Maximes et pensées*“.

In istoria filosofiei, *d'Alembert* ocupă un loc printre distinşii filosofi din timpul său, poate nu atât ca creator de teze filosofice sau de doctrine, cât propagandist neobosit al marilor idei, cari au făcut gloria gânditorilor francezi ai sec. XVIII.

Activitatea lui n'a fost unilaterală : are lucrări de pictură, muzică, etc. Insă aci, nu voiu mai aminti decât acea parte a activităţii sale care îşi poate avea locul într'o revistă matematică. Or, *d'Alembert* merită cu prisosinţă titlul de mare matematician. Numeroasele lui lucrări, a căror valoare nu-mi este mie dat a o aprecia, i-au adus gloria de care s'a bucurat în timpul vieţii şi care s'a prelungit pe numele său încă după un secol şi jumătate.

Dintre lucrările sale cele mai de seamă voiu aminti principiul său, a cărui enunţare şi demonstraţie a dat-o el însus într'una din operele sale. „*Principiul lui d'Alembert* furnizează o metodă generală pentru a pune în ecuaţii toate problemele relative la mişcarea unui sistem de corpuri legate între ele într'un mod oarecare“. *(Th. Moutard)* Principiile fundamentale ale mecanicei, al inerţiei şi al independenţei efectelor forţelor cari lucrează simultan asupra unui acelaş punct material, nu erau suficiente pentru descoperirea forţelor ce provin din acţiunea unor corpuri legate între ele. Cu alte cuvinte principiile sus enunţate, nu ajungeau pentru determinarea mişcărilor. Se vedea nevoia descoperirii forţelor cari trebuiau substituite legăturilor dintre corpuri, pentru a aduce studiul acestor corpuri legate între ele, la acela al mişcării punctelor materiale libere. Tocmai atunci, în anul 1742, *d'Alembert* dădu la iveală principiul său care s'ar putea enunţa azi în modul următor :

„*Când un sistem de puncte materiale, legate între ele într'un mod oarecare, se mişcă sub acţiunea unor forţe, există, în fiecare moment, un echilibru, în virtutea legăturilor între aceste forţe şi forţele de inerţie, adică forţele egale şi direct opuse acelora care ar produce pentru fiecare punct material, presupus liber, mişcarea pe care o suferă în realitate*“.*)

Enunţarea acestui principiu, destul de simplu la prima vedere, a avut urmări în desvoltarea mecanicei şi poate a redus într'ucâtva studiul dinamicei la acela al staticei.

Printre lucrările lui *d'Alembert* mai putem aminti : „*Réflexions sur la cause générale des vents*“ (1744) ; „*Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides, pour servir de supplément au traité de dynamique*“ (1744) ; „*Recherches sur la précéssion des équinoxes*“ (1749) ; „*Nova tabularum lunarium emendatio*“ (1756).

Dacă privim acum cu gândul activitatea imensă a omului de litere, filosofului şi matematicianului *d'Alembert*, nu putem sta fără admiraţie în faţa operei sale, atât de variate, din care reiese, pretutindeni talentul unui literat de rassă îmbinat cu geniul unui distins geometru.

15. — *Numărul 142857.*

Unul din rezolvitorii problemei 1005, citaţi la pagina 82 din numărul trecut al R. M. T. numeşte numărul 142857 numărul lui *Zervos*, profesorul atenian, care ar fi găsit că este singurul număr cu cifre diferite, care înmulţit cu 2, 3, 4, 5, 6 dă numere de acelaşi număr de cifre şi scris cu aceleaşi cifre.

Nu ştiu cine are întâitatea găsirei numărului 142857.

După cum s'a văzut din nota dela finele soluţiei problemei 1005, acest număr este dat în diferite culegeri de curiozităţi aritmetice.

Eu am luat cunoştinţă de el din ziarul „*Temeswarer Zeitung*“ din 19 Ianuarie 1930, unde sub tittul „*Minune matematică*“ se spune că profesorul *Zervos* a descoperit *minunea*, că *dacă se înmulţeşte 142857 cu 2, 3, . . .*

Am comunicat şi publicat această informaţie în suplimentul *Gazetei Matematice* din Aprilie 1932 la recreaţia 17 şi am propus problema 1005 spre a vedea cum rezolvă corespondenţii noştri o astfel de minune.

M-am minunat de numărul mic de rezolvitori şi am ţinut să dau această notă explicativă pentru

*) *Th. Moutard.*

ca acela care a găsit întâiul proprietatea numărului 142857 să afle că eu nu-i revendic nici o prioritate.

COL. GH. BUICLIU

16. — *Despre cazuri particulare și generalizări.*

1. Fiind dat un fapt f și un altul F, se zice că F generalizează pe f, atunci când din F se pot deduce, prin particularizări, toate faptele f_i analoage faptului f. In particular, o teoremă matematică T generalizează teorema t, atunci când în enunțul primei teoreme este cuprins în întregime *și* enunțul celei de a doua. Invers, se trece dela t la T prin intermediul tuturor cazurilor t_i, analoage lui t. Se vede ușor, că o primă condiție necesară ca T să fie o generalizare efectivă a lui t, este ca T să poată da naștere și altor teoreme t_i, analoage cu t, dar a căror anunțare să nu se poată deduce din t.

Aceste scurte definiții par a fi cu totul precise și în afara oricăror indoieli. Totuș, vom arăta, în rândurile ce urmează, că definițiile de mai sus au fost uneori bruscate și chiar contrazise; aceasta însă numai în aparență, deoarece o cercetare mai aprofundată și o interpretare justă a cazurilor speciale ne va dovedi că nimic nu este de schimbat în enunțurile de mai sus.

2. Mai întâi însă, vom da un exemplu de falsă generalizare, pe care ni l-a procurat nota 37 din *Gazeta Matematică*, vol. XXXIV. Se dă în această notă, drept generalizare a inegalității:

$$(1) \qquad \frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a+b+c} \geqq 0,$$

unde a, b, c, sunt cantități reale, următoarea inegalitate:

$$(1') \qquad \frac{a^{3n}+b^{3n}+c^{3n}-3a^nb^nc^n}{a^n+b^n+c^n} \geqq 0.$$

La prima vedere s'ar părea că (1') este o generalizare efectivă a lui (1), deoarece satisface una din condițiile exprimate de noi, mai sus. Intr'adevăr, (1) se poate obține din (1') făcând $n=1$. Și, mai mult, pentru diferite valori date lui n, se obțin inegalități analoage lui (1). Concluzia ar fi deci că (1') generalizează pe (1). Concluzie care, se poate arăta ușor, nu este adevărată, deoarece și propoziția contrară este tot atât de întemeiată. Anume, dacă în (1), *particularizăm* pe a b, c, luând în locul lor respectiv a^n, b^n, c^n, se obține (1'). Mai mult, pentru alte particularizări ale lui a, b, c, se obțin inegalități analoage lui (1'). Concluzia ar fi, că (1) generalizează pe (1'). Referindu-ne la definițiile de mai sus, presupunem că (1) exprimă pe t, iar (1') pe T. Prima concluzie ne spune că t este cuprins în întregime în T, — în aceasta din urmă fiind cuprinse și alte inegalități t_i. Cea de a doua concluzie ne spune că T este cuprins în întregime în t, alături de alte inegalități T_i, toate cuprinse în t. Ori aceasta însemnează pur și simplu că t este identic cu T Deosebirea stă numai în notații; — și se poate ușor recunoaște că notația (1) este și cea mai simplă și cea mai comodă.

3. Există în calculul integral un capitol important, al *integralelor singulare*. Desprindem din teoria acestor integrale cazul când funcția $f(x)$, a cărei integrală se caută, devine în intervalul de întegrat, fie $a \leqq x \leqq b$, înfinită. Integrala (2) $\int_a^b f(x)\,dx$ se numește integrală singulară. Menținându-ne în cadrul general al definiției, e logic să presupunem că funcția $f(x)$ devine infinită într'un punct c, cuprins în întervalul (a, b), adică (3) $a<c<b$. Egalitatea, de ambele părți, corespunzând la două cazuri particulare (4) $c=a$ și (5) $c=b$. O propoziție oarecare, relativă la integralele singulare, pentru $a<c<b$ ar constitui o teoremă T, iar pentru cazurile (4) si (5), două teoreme particulare analoage t_1 și t_2. Va fi deci deajuns să stabilim teorema T, pentru a avea pe t_1 și t_2, prin intermediul lui (4) și (5). Teoria întegralelor singulare, dacă ar fi urmată pe această cale, căutându-se mai întâi stabilirea teoremelor T și apoi deducerea teoremelor t_1 și t_2 din primele, ar fi însă mai dificilă și mult mai greoaie. Deaceea, se obișnuește a se considera mai întâi cazul când c coincide cu a, stabilindu-se teoremele t_1 și apoi, să se deducă din acestea teoremele grupurilor t_2 și T. Cazului (4), căruia îi corespund teoremele t_1 i se spune deobicei caz particular, iar cazului T, caz general. Dar însuș faptul că T se deduce din t_1, ne îndeamnă să schimbăm rolurile. Vrem să arătăm că de fapt t_1 este teorema generală.

Pentru aceasta, vom complecta cu următoarele considerații, cele spuse la pragraful 1. Am numit T o teoremă generală, din care prin particularizări

se poate deduce teorema t şi teoremele t_i, analoage lui t. Mai precis, vom numi caz general al teoremelor t_i $(i = 1, 2, \ldots, i)$, teorema T, care dă naştere teoremelor t_j $(j = 1, 2, \ldots, j)$, prin j particularizări directe, aşa încât t_i să se obţină din combinarea lui T cu un număr oarecare de teoreme t_j. Vom însemna simbolic acestă combinare: $T + \Sigma t_j$. De pildă, dacă teorema T poate fi particularizată direct în teorema t_1, atunci teorema t, care se obţine prin operaţia scrisă simbolic $t = T + t_1$, este un caz particular al teoremei T.

Să revenim la chestiunea care ne preocupă. Presupunem că însemnăm o teoremă relativă la cazul (4) $c = a$, cu T şi vrem să arătăm că ea satisface condiţiilor de mai sus, atunci când este confruntată cu teoremele t_1 şi t_2, respectiv corespunzătoare cazurilor (5) $c = b$ şi (3) $a < c < b$. In adevăr:

$$(6) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx .$$

(6) ne arată că t_1 se deduce direct din T. Dacă funcţia $f(x)$ devine înfinită într'un punct c interior întervalului (a, b), scriem:

$$(7) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx .$$

(Dacă integralele $\int_a^c f(x)\,dx$ şi $\int_c^b f(x)\,dx$ sunt convergente, se zice că şi $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă).

Relaţia (7) ne arată că avem dependenţa căutată: $t = T + t_1$; deci T este teorema generală şi prin urmare $c = a$ este cazul general în discuţia întegralelor singulare.

4. Un exemplu asemănător îl constitue teoria rezolvării triedrelor. Etc.

N. O. ZAHARIA

BIBLIOGRAFIE

1 *Gazeta Matematică*, anul XXXIX, No. 1, Septemvrie 1933. Lista membrilor Societăţii „*Gazeta Matematică*". Membrii decedaţi. Congresul matematicienilor greci, de *I. Ionescu*. Concursul „*Gazetei Matematice*". Premiile şi alte dispoziţiuni ale fondurilor „*Gazetei Matematice*".

2. *Boletin Matematico Elemental*, Ano VI, No. 6, Agosto de 1933, Buenos Aires. Alt procedeu de a deduce formula ecuaţiunei de gradul al 2-lea, de M. *O. Gonzalez*. (Procedeul este de altfel cunoscut, el constă în a pune ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$, sub forma: $\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c$.)

3 *Giuseppe Tacchella*. (a Genova) Fondamenti di Geometria Analitica a due ed a tre dimensioni dei. Luoghi lineari „Composti". (Estratto dal volume LXXI (1933) della 3-a Serie del Giornale di Matematiche di Battaglini, Napoli.)

4 *Mihail St. Botez* Les surfaces conoïde. (Monographie).

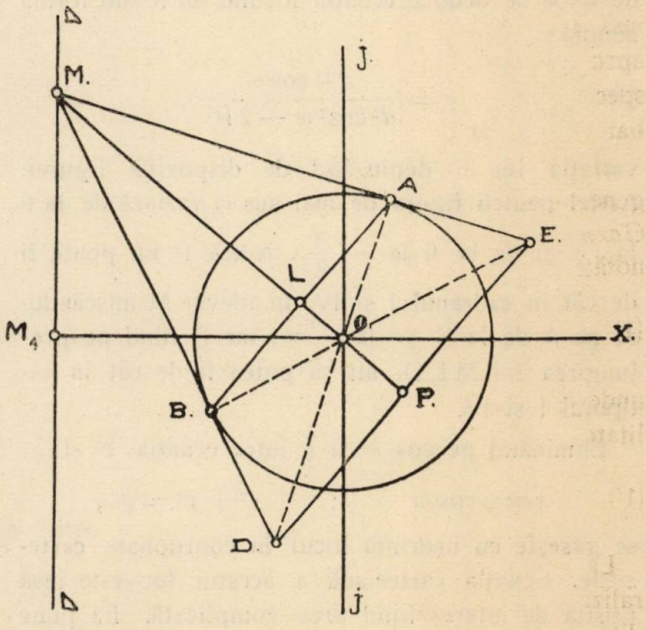
PROBLEME REZOLVATE

889. — *Din fie-care punct M al unei drepte Δ se duc tangentele MA şi MB la un cerc cu centrul în O. Razele OA şi OB întâlnesc aceste tangente în D şi E. Se cere locul geometric al mijlocului segmentului DE.*

COL. GH BUICLIU

Luăm ca pol pe O şi ca axă polară perpendiculara OM, pe Δ. Fie P mijlocul lui DE şi L intersecţia lui OM cu AB.

Triunghiurile dreptunghice DAM, EBM sunt egale având unghiul M comun şi catetele MA, MB egale ca tangente la O.



Deci:

$$ME = MD$$

şi $DE \| AB$. Urmează că P este pe bisectoarea MO a lui M. Punctele L, P fiind intersecţii de diagonale în patrulaterul complect MAOBDE, divid armonic pe MO.

Deci:

$$\frac{LO}{LM} = \frac{PO}{PM}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad (1) \qquad \frac{LO}{OM - LO} = \frac{PO}{PO + OM}.$$

Dar AB fiind polara lui M faţă de O, avem:

$$OL \times OM = R^2 \qquad \overset{*}{*}\overset{*}{*} \qquad LO = \frac{R^2}{OM},$$

unde R este raza lui O. Ducând această valoare a lui LO în (1) se găseşte:

$$(2) \qquad \frac{R^2}{\overline{OM}^2 - R^2} = \frac{PO}{PO + OM}$$

Fie d distanţa OM_1 şi ω unghiul polar. Avem:

$$OM = d\cos\omega$$

aşa că dacă se înseamnă PO cu ϱ din (2) se scoate:

$$\frac{R^2}{d^2\cos^2\omega - R^2} = \frac{\varrho}{\varrho + d\cos\omega},$$

de unde se deduce ecuaţia locului lui P sub forma simplă:

$$(3) \qquad \varrho = \frac{d\,R\cos\omega}{d^2\cos^2\omega - 2R^2},$$

variaţia lui ω depinzând de dispoziţia figurei. Astfel pentru figura de mai sus ω vaziază de la 0 la $\frac{\pi}{2}$ şi de la 0 la $-\frac{\pi}{2}$. Adică P nu poate fi de cât în cadranul I şi IV. In adevăr M mişcându-se pe Δ de la $+\infty$ la $-\infty$, iar P fiind pe prelungirea lui ML O, nu va putea fi de cât în cadranul I şi IV.

Eliminând pe cos ω şi ϱ între ecuaţia (2) şi:

$$x = \varrho\cos\omega \qquad ; \qquad x^2 + y^2 = \varrho^2,$$

se găseşte cu uşurinţă locul în coordonate carteziene. Ecuaţia carteziană a acestui loc este însă lipsită de interes fiind prea complicată. Ea pune numai în evidenţă că locul e o curbă unicursală şi că dreptele izotrope fac parte din loc, pentru cazul când ω variază ori cum.

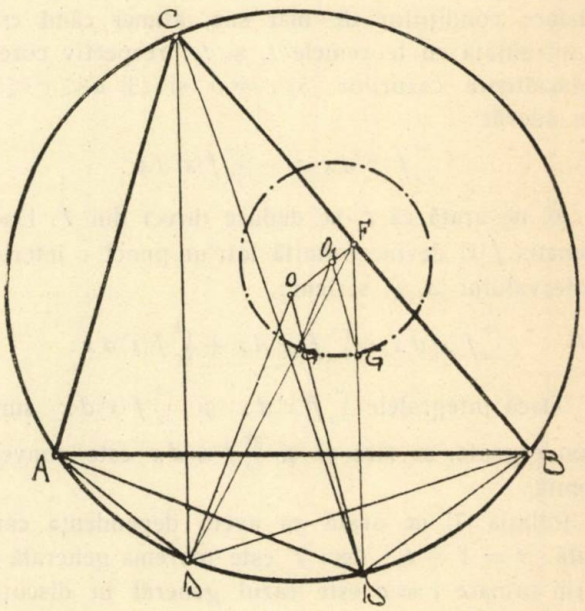
Observare. Am primit soluţii de la trei corespondenţi. Unul a găsit că locul e o elipsă, iar ceilalţi doi că e un cerc. Eroarea este prea mare pentru a le menţiona numele.

Gh. B.

1084. — *Se dă cercul O şi triunghiul A B C înscris în el. Din A se duce coarda variabilă A D în cercul O. Se cere locul geometric al centrului de greutate al triunghiului B C D, când A D variază.*

V. ALACI

Fie F mijlocul lui BC şi D punctul variabil. Unim aceste puncte F şi D cu punctul O. Centrul de greutate G al triunghiului CDB este la intersecţia medianelor sale, adică se găseşte pe DF la $\frac{2}{3}$ din ea, începând din D.



Ducând din G o paralelă la O D, ea va tăia pe O F într'un punct O_1 astfel ca:

$$\frac{O_1O}{OF} = \frac{2}{3}$$

Rezultă de aci că punctul O_1 este fix. Cum avem:

$$O_1G = \frac{OD}{3},$$

O D fiind raza cercului O, rezultă încă că O_1 G este constantă.

Locul geometric căutat este astfel un cerc cu centru O_1 şi cu raza O_1 G, care este $\frac{1}{3}$ din raza cercului O.

Soluții date de d-nii: *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Iliescu Tr. Octavian*, *Ivănescu Cezar* (student, Iași), *Lățea P. C-tin* (Șc. Milit. de Artilerie), *Lupescu C.* (student), *Margulius Marius* (lic. Spiru-Haret, București), *Mehedinți D D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Mihăileanu N.* (Constanța), *Motoc D. Mircea* (Oltenița), *Popa B. Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Popescu C. Ștefan* (lic. Milit, Craiova), *Rezeanu P. Marin*, *Săndulescu Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Süli Mihai* (Șc. Polit., Timișoara), *Stan Mitrus* (T-Măgurele), *Theoharide Lucian* (Șc. Pregăt. de Ofițeri, București), *Tica P. Marin* (Șc. Milit. de Artilerie) și *Vasiliu-Leoben Gh.* (Inginer).

1099. — *Fie S_1, S_2, S_3, S respectiv, aria triunghiului ortic, aceia a triunghiului format de centrele cercurilor exînscrise, aria triunghiului median și suprafața triunghiului de referință. Să se stabilească relația:*

$$\frac{S_1}{S_2}\cdot\frac{S}{S_3}=\frac{2r}{R}(2-\Sigma\cos^2 A),$$

celelalte notații fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

MARIUS MARGULIUS

Fie A B C triunghiul de referință. Se știe că laturile triunghiului său ortic sunt respectiv:

$$a\cos A,\qquad b\cos B,\qquad c\cos C,$$

iar raza cercului său circumscris, este:

$$R'=\frac{R}{2}$$

(Compléments de Trigonométrie, par F. G. M., pag. 201, 202)

Știind că auprafața unui triunghiu este egală cu produsul laturilor sale împărțit prin de patru ori raza cercului său circumscris, putem scri:

$$S_1=\frac{abc\cos A\cos B\cos C}{4R'}=\frac{abc\cos A\cos B\cos C}{2R}$$

Cum avem cunoscut:

$$\frac{abc}{4R}=S\quad\text{și}\quad\cos A\cos B\cos C=\frac{1-\Sigma\cos^2 A}{2}$$

(C. d. T. pag. 69), avem:

$$(1)\qquad S_1=S(1-\Sigma\cos^2 A).$$

Este încă cunoscută formula:

$$S_2=\frac{abc}{2r}$$

(C. de T. pag. 191), care se mai poate scri:

$$(2)\qquad S_2=\frac{abc}{4R}\cdot\frac{2R}{r}=\frac{2RS}{r}.$$

Rezultă din (1) și (2):

$$(3)\qquad\frac{S_1}{S_2}=\frac{r}{2R}(1-\Sigma\cos^2 A).$$

De altă parte știm că suprafața triunghiului median este un sfert din suprafața triunghiului de referință, deci:

$$(4)\qquad\frac{S}{S_3}=4.$$

Multiplicând relațiunile (3) și (4), găsim:

$$\frac{S_1}{S_2}\cdot\frac{S}{S_3}=\frac{2r}{R}(1-\Sigma\cos^2 A),$$

care este tocmai relațiunea cerută.

Soluții date de d-nii: *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M. Marin*, *Dan T. Traian* (Șc. Polit., Timișoara), *Fofiu Gornel* (Șc. Polit., Timișoara), *Ivănescu Cezar* (lic. Bârlad), *Lățea P. C-tin* (Șc. Milit., de Artilerie), *Mereuța-Neamț Emilian*, *Negrea A. Leonte-Mircea* (licențiat în Matematici), *Popa G. Ioan* (Oltenița), *Popescu C. Ștefan*, *Süli M. Mihai* (Șc. Polit, Timișoara) și *Trică S. Ioan* (Caransebeș).

1100. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x+y+z-xy-yz-zx=16-xyz \\ (x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2=200 \\ \Sigma(x^3-1)(y-1)(z-1)=1065 \end{cases}$$

M. N. GRINBERG

Ținând seamă că:

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1),$$

ecuația 3-a devine:

$$(x-1)(y-1)(z-1)(\Sigma x^2+\Sigma x+3)=1065,$$

și cum prima ecuație se poate scri:

$$(x-1)(y-1)(z-1)=15,$$

deducem:

$$(1)\qquad\Sigma x^2+\Sigma x=68.$$

A 2-a ecuație a sistemului, care simplificată se poate scri:

$$\Sigma x^2 + \Sigma xy = 100,$$

adunată ca prima ecuație a sistemului, ne dă:

$$\Sigma x^2 + \Sigma x + xyz = 116,$$

și ținând seamă de (1), deducem:

$$xyz = 48. \tag{2}$$

Prima și a 2-a ecuație a sistemului dat, ținând seamă de (2) se pot scri:

$$\begin{aligned} \Sigma x - \Sigma xy &= -32 \\ (\Sigma x)^2 - \Sigma xy &= 100 \end{aligned} \tag{3}$$

Scăzând aceste două ecuațiuni, prima din a 2-a, deducem:

$$(\Sigma x)^2 - \Sigma x - 132 = 0,$$

ecuație de gradul al 2-lea în Σx, care rezolvată, ne dă:

$$\Sigma x = 12$$

$$\Sigma x = -11$$

Aceste valori introduse în (3), ne dau:

$$\Sigma xy = 44$$

sau:

$$\Sigma xy = 21.$$

Rezultă dar că sistemul dat este echivalent cu sistemele:

$$\begin{cases} \Sigma x = 12 \\ \Sigma xy = 44 \\ xyz = 48 \end{cases} \qquad \begin{cases} \Sigma x = -11 \\ \Sigma xy = 21 \\ xyz = 48 \end{cases}$$

Fiecare din aceste sisteme scriu suma, suma produselor câte două și produsul necunoscutelor x, y, z; rezultă că x, y, z sunt rădăcinele ecuațiilor:

$$t^3 - 12t^2 + 44t - 48 = 0 \tag{4}$$

$$t^3 + 11t^2 + 21t - 48 = 0. \tag{5}$$

Ecuația (4) descompusă în factori devine:

$$(t-2)(t-4)(t-6) = 0,$$

ceeace ce ne permite a scri următoarele sisteme de soluții pentru sistemul dat:

x	2	2	4	4	6	6
y	4	6	2	6	2	4
z	6	4	6	2	4	2

Ecuația (5) are rădăcini iraționale. Aplicând de exemplu metoda părților proporționale, găsim cu două zecimale exacte sistemul de soluții:

$$\begin{cases} x = 1,29\ldots \\ y = -5,23\ldots \\ z = -7,06 \end{cases}$$

și încă cinci sisteme de soluții, permutând pe x, y, z.

Soluții date de d-nii: *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Chiriță Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M. Mihai* (lic. Milit., Craiova), *Curchi Ioan* (student, București), *Dan T. Traian* (Șc. Polit., Timișoara), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Mazilu C. Panait* (lic. Internat, Iași), *Mereuță-Neamț Emilian*, *Negrea A. Leonte-Mircea* (licențiat în Matematici), *Nenciulescu H.* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Popa Nicolaie* (Beiuș), *Popa D. Traian* (lic. Giurgiu), *Predoescu I. Marin* (lic. Buzești, Craiova), *Predoescu Traian* (lic. Milit., Craiova), *Stănescu M. Emil* (lic. Milit., Craiova), *Stoica Ioan* (Sub-Lt.)

Observare. Ecuația (5) a fost rezolvată numai de d-l *Negrea A. Leonte-Mircea* (licențiat în Matematici).

1123. — *Doi călători pleacă la aceiași oră, respectiv din comunele A și B spre comuna C, în aceiași direcție. Primul călător pleacă cu trăsura din A, al doilea pe picioare din B și ajung deodată în C, după 3 ore și 20 minute de mers.*

Care este viteza în metri pe minut a fiecăruia, dacă distanța între comunele A și B este 9 km. și călătorul pe picioare face 4 minute și 30 secunde mai mult pe kilometru de cât trăsura?

I. DUMITRIU-DADA

Fie v și v' respectiv vitezele în metri pe minut a celor 2 călători, ce pornesc din A și B. Dacă $BC = s$ metri, atunci $AC = s + 9000$ metri.

Rezultă că:

$$\frac{s+9000}{v} \quad \text{şi} \quad \frac{s}{v'}$$

reprezintă respectiv, cât timp trebuie fiecăruia pentru a parcurge distanţele corespunzătoare şi cum acest timp este acelaşi, $3^{ore}, 20^{m} = 200$ minute, putem scri:

$$\frac{s+9000}{v} = \frac{s}{v'} = 200\,.$$

Aplicând o proprietate a proporţiilor, găsim:

$$\frac{9000}{v-v'} = 200$$

$$v - v' = 45\,. \qquad (1)$$

De altă parte, avem:

$$\frac{1000}{v'} = \frac{1000}{v} + \frac{9}{2}\,, \qquad (2)$$

care scrie că timpul întrebuinţat de călătorul ce merge pe jos pentru a parcurge 1 Km. = 1000 metri, este cu $4^{m}.30^{s} = \frac{9}{2}$ minute, mai mare de cât timpul întrebuinţat de călătorul cu trăsura, pentru a parcurge aceiaşi distanţă.

Ecuaţia (2) ţinând seamă de (1), devine:

$$9\,v\,v' = 2000\,(v - v') = 90000$$

$$v\,v' = 10000 \qquad (3)$$

Ridicând ecuaţia (1) la patrat şi adunând'o cu ecuaţia (3) multiplicată cu 4, găsim:

$$(v+v')^2 = 42025$$

$$v + v' = 205\,. \qquad (4)$$

Rădăcina negativă (— 205) n'are senz.

Vitezele cerute satisfac deci sistemul:

$$\begin{cases} v - v' = 45 \\ v + v' = 205\,, \end{cases}$$

care rezolvat ne dă:

$$v = 125^{m}/_{s}\,, \qquad v' = 80^{m}/_{s}\,.$$

Soluţii date de d-ra: *Ickim Ermina* (Iaşi) şi de d-nii. *Anastasescu Mihai* (bacalaureat, Târgovistea), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M. Marin* (lic. Milit., Craiova), *Constantin G. Petre* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Cosman Alexandru* (Năsăud), *Crişan Iacob* (lic. Milit, Tg-Mureş), *Dan T. Traian* (Şc. Polit., Timişoara), *Deceanu Gheorghe* (lic. Milit, Tg-Mureş), *Gheorghe Valeriu* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Gheorghiu Alexandru* (lic. Milit, Tg-Mureş), *Ghiocel V. Vasile* (bacalaureat, Giurgiu), *Godeanu Ig. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Ilie C. Ioan* (lic Milit., Tg-Mureş, *Ivănescu Cezar* (bacalaureat, Bârlad), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit., de Artilerie), *Lupescu Corneliu* (lic. Roman), *Mazilu Panaite* (lic. Internat, Iaşi), *Mehedinţi D. D tru* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Mereuţă Emilian* (student. Bucureşti), *Motoc D. Mircea* (Olteniţa), *Nenciulescu Hariton* (lic. Milit, Tg-Mureş), *Popa Nicolae* ((lic. Beiuş), *Porumbescu D.* (Tg-Ocna), *Preda C-tin* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Procopiescu Mihai* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Sandovici Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Santto F. Georges* (lic. Internat, Iaşi), *Sâmbotin Gh.* (Sub-Lt.), *Soare I. Ilie* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Süli Mihai* (Şc. Polit., Timişoara), *Ţarălungă D-tru* (lic Milit, Tg-Mureş), *Vasiliu-Leoben Gh* (Inginer) şi *Vurtejanu C-tin* (lic. Milit., Tg-Mureş).

Observări. 1°. S'au primit două soluţii necomplecte, pe care nu le menţionăm 2°. S'au primit două soluţiuni identice din Craiova, scrise de aceiaşi mâna, pe care natural nu le menţionăm.

1137. — *Avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, pris une fois, former trois nombres de trois chiffres, tels que l'un de ces nombres égale la somme des deux autres et soit un cube parfait.*

V. THÉBAULT

Cuburile de trei cifre diferite sunt: 125, 216, 512, 729.

Primele trei cuburi nu pot satisface enunţul, căci cu cifrele respectiv rămase din sirul dat, anume:

(3, 4, 6, 7, 8, 9), (3, 4, 5, 7, 8, 9), (3, 4, 6, 7, 8, 9)

nu se pot forma câte două numere de câte trei cifre, a căror sumă să fie respectiv 125, 216, 512, de oarece sutele acestor numere formate, ar fi minimum 3 şi 4. Rămâne $729 = 9^3$, care poate fi suma a două numere de câte trei cifre, dintre cifrele rămase din şirul dat, anume:

(1, 3, 4, 5, 6, 8).

In adevăr constatăm cu uşurinţă, că avem:

$$729 = 143 + 586$$
$$729 = 146 + 583$$
$$729 = 183 + 546$$
$$729 = 186 + 543$$

Astfel singurele numere de trei cifre, care satisfac enunţul sunt:

729, 143, 586; 729, 146, 583;

729, 183, 546; 729, 186, 543.

Soluții date de d-rele: *Antoniu V. Emilia* (lic. Oltea-Doamnă, Iași), *Roșca Șt. Veronica* (Craiova) și de d-nii *Arbter Emil* (lic. Beiuș), *Chlriac C-tin* (lic. Milit., Iași), *Chiriță M.* (lic. Milit., Craiova), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M* (lic. Milit., Craiova), *Crișan T. Iacob* (lic. Milit. Tg-Mureș), *Curchi Ioan* (student, București), *Deniș C-tin* (lic. Roman), *Gheorghiu Alexandru* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Ghiocel V. Vașile* (lic. Giurgiu), *Godeanu I. Vasi'e* (lic. Milit., Craiova), *Grama L. Marin* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Hascal Herman* (lic. Roman) *Ionescu Emil* (bacalaureat, Craiova), *Lupescu Gh. Corneliu* (lic. Roman), *Mașcaș Petru* (lic. Beiuș), *Mazilu Panaite* (lic. Internat, Iași), *Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir, București), *Mereuță-Neamț Emilian*, *Mihalcea N. Nicolae* (lic. Beiuș), *Pănoiu E. Emanoil* (student), *Păunescu N.* (lic. Milit. Craiova), *Popa Nicolaie*, *Popa D. Traian*, *Popescu Adrian* (student), *Popescu C. Ștefan* (lic. Milit., Craiova), *Predoescu I. Marin* (lic. Buzești, Craiova), *Predoescu Traian* (lic. Milit., Craiova), *Procopiescu Mihai* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Racoțeanu Ion* (lic. Milit., Craiova), *Rezeanu P. Marin* (T-Măgurele), *Rogalschi V. Eugen* (lic. Milit., Chișinău), *Sandovici Vasile* (lic. Internat, Iași), *Santto F. Georges* (lic. Internat, Iași), *Sâmbotin Gh.*(Sub-Lt.), *Tica P. Marin*, *Theohariade Lucian* (Șc. Preg. de Ofițeri) și *Țarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureș).

PROBLEME PROPUSE

1232. — Să se găsească trei numere impare consecutive, astfel ca suma patratelor lor să fie un număr de cinci cifre de forma $a\,a\,a\,b\,b$, unde a și b sunt cifre diferite.

P. MAZILU

1233. — Cu ce se poate simplifica fracția:

$$\frac{1009 \times 10^{2p} - 1}{121 \times 4^{2p} + 22 \times 4^{p} + 1},$$

p întreg pozitiv. ION MARGINEANU

1234. — Perpendicularele, duse prin centrul cercului circumscris unui patrulater, pe diagonalele sale, întâlnesc laturile corespunzătoare ale patrulaterului obținut unind mijloacele laturilor consecutive ale patrulaterului de referință, în patru puncte conciclice.

CONSTANTIN IONESCU BUJOR

1235. — Soient a, b, c, $2p$, r, les côtés, le périmètre, le rayon du cercle inscrit à un triangle ABC rectangle en A. Montrer que l'on a:

$$\frac{(a-b)(p-c)}{c} = \frac{(a-c)(p-b)}{b} = r.$$

V. THÉBAULT

1236. — Să se studieze și să se construiască curba:

$$x y^2 = 16x^4 - 40x^3 + 32x^2 - 9x + 1.$$

COL. GH. BUICLIU

1237. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^6 + 27y^6 = a \\ x^4 - 3x^2y^2 + 9y^4 = b \end{cases}$$

EMILIAN MEREUTA

1238. — Să se stabilească relația:

$$I_q^4 = \begin{vmatrix} -C_q^1 & C_q^2 & -C_q^3 & C_q^4 \\ 1 & -C_q^1 & C_q^2 & -C_q^3 \\ 0 & 1 & -C_q^1 & C_q^2 \\ 0 & 0 & 1 & -C_q^1 \end{vmatrix},$$

știind că C_m^n înseamnă combinări a m obiecte luate câte n și I_m^n înseamnă combinări cu repetiție a m obiecte luate câte n.

Să se generalizeze relația dată.

V. ALACI

1239. — Să se stabilească identitatea:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 2(k+1)a - \sin^2 2ka}{\sin^2 (k+1)a - \sin^2 ka} = \frac{4\cos a \cos (n+2)a \sin na}{\sin a}.$$

CEZAR IVANESCU

INFORMAȚIUNI

ȘCOALA POLITEHNICĂ DIN TIMIȘOARA

PROSPECT

Organizațiunea Școalei.

Școala Politehnică din Timișoara cuprinde două secțiuni:
a) Secțiunea de ingineri mecanici-electricieni.
b) Secțiunea de ingineri de mine.

Invățământul se întinde pe durata de cinci ani: un an preparator și patru ani de studii, după cari absolventul obține diploma de inginer, în specialitatea pe care și-a ales-o.

Admiterea studenților.

Admiterea și matricularea studenților se face în anul preparator al școlii pe baza unui examen de admitere ce se ține la 23 Octombrie 1933 ora 8 dim. în Timișoara. Școala Politehnică, str. Tunari No. 2.

Inscrierea la acest examen se face printr'o cerere (model); timbrată, adresată Direcțiunii Școalei însoțită de următoarele acte în original:

a) actul de naștere,

b) un certificat medical despre sănătatea candidatului, constatând că nu sufere de nicio infirmitate.

c) diploma de bacalaureat a liceului,

Diplomele școlilor străine vor trebui să fie echivalate de Ministerul Instrucțiunii,

d) două fotografii (format 6×9 cm.), semnate.

Examenul de admitere se face în scris și oral, în fața unei comisiuni, sub președinția rectorului școalei.

Cererile de înscriere pentru examen se primesc la cancelaria școlii până la 21 Octombrie 1933.

Candidații reușiți la examen vor fi înmatriculați în anul preparator al școalei.

Studenții Școlilor Politehnice străine pot fi admiși și în anii I., II. sau III., pe baza unui examen de diferență, care va fi hotărît de Comitetul de Direcțiune.

Taxe.

Taxa de înscriere și pentru examenul de admitere în școală, e de 500 lei. Această taxă se achită înainte de închiderea înscrierilor și nimeni nu poate fi scutit de ea.

Taxa de diferență e de 500 lei.

Programul examenului de admitere.

1. Probă scrisă și orală Aritmetică,
2. Probă scrisă și orală Geometriea plană și în spațiu,
3. Probă scrisă și orală Algebră și Trigonometrie.

Programul cunoștințelor din cari se dau aceste probe, e programul de liceu, publicat în Monitorul Oficial No. 96 din 3 Mai 1929.

DIRECȚIUNEA

CONGRESUL MATEMATICIENILOR GRECI.

Aducem la cunostința matematicienilor români, profesori, ingineri, ofițeri, ect., următorul apel al profesorilor universitari din Atena, *N. Hatzidakis* și *P. Zervos*, pentru un Congres al Matematicianilor greci, din Iulie 1934:

Athénes, 18 Juiilet 1933.

Monsieur et cher confrère,

Nous avons l'honneur de vous annoncer la convocation d'un Congrés Mathématique à Athéenes pendant le mois de Juillet de l'année 1934.

Comme ce congrés est spécialement organisé par la Fédération des professeurs de l'Enseignement Moyen de Gréce, nous vous serions trés obligés, si vous voulez bien nous envoyer les noms et les adresses des Fédérations et Corporations analogues de votre pays, pour que nous puissions les inviter à notre Congrés.

Nous espérons vivement en même temps, que vous voudrez bien y assister personnellement en honorant ses séances par des conférences ou des communications de votre choix. (Langues étrangéres du Congrés. Français, Allemand, Anglais, Italien). Tous les mathématiciens de Grèce y prendront part.

La participation vive de votre pays à ce Congrés de même que celle des autres pays balcaniques serait un bon augure pour la possibilité de la fondation d'une confédération interbalcanique, permanente des Mathématiciens qui serait très utile pout tous nos pays; elle organiserait des Congrés Mathématiques Interbalcaniques dans les capitales de nos pays et elle rapprocherait par tous les moyens possibles les mouvements locaux, tant didactiques que scientifiques, qui ont lieu dans le domaine de notre belle science. Elle aiderait, en même temps, au rapprochement général de nos peuples, si voisins et si, cependant, peu connus mutuellement.

Le programme détaillé du Congrés nous sera envoyé à temps; pour le moment nous vous en communiquons les sections générales qui sont:

I. Conférences d'interêt général;

II. A. Section scientifique; B. Section didactique; C. Section professionnelle.

Nous vous prions de bien vouloir communiquer cette lettre à vos confrères.

N. Hatzidakis, P. Zervos
professeurs à l'Université, Membres honoraire du Comité d' Organisation.

Abonamentul pe anul XIII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL XIII. 15 NOEMBRIE 1933 NO 9.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 COL. GH BUICLIU: O PROBLEMA DE DIVIZIBILITATE.
2. GHIȚESCU SPIRIDON: O NOUA TEORIE A INTINDERII UNIVERSULUI.
3. NOTE MATEMATICE: 17, 18, 19, 20
4. CHESTIUNI DE EXAMEN SCOALA POLITECHNICA DIN TIMISOARA.
5. BIBLIOGRAFIE.
6. PROBLEME REZOLVATE: 1139, 1143, 1148, 1154, 1155, 1159.
7. PROBLEME PROPUSE: 1240-1247.
8 INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Artegrafice „Tipografia Românească"

Avem plăcerea a anunţa că începând dela 15 Septemvrie 1933, mai face parte dintre membrii „Revistei Matematice din Timişoara“ şi D-l *Virgil Claudian,* licenţiat în matematici, profesor la Şcoala Normală din Galaţi, fost corespondent distins al „Revistei“.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara“ este pentru anul XIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare

---

ANUL XIII — NO. 9. TIMISOARA, 15 NOEMBRIE 1933

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie.

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Şcoala Politechnică din Timişoara.

O PROBLEMĂ DE DIVIZIBILITATE

De

COL. GH. BUICLIU

In Vol. XII, pagina 31 *Revista Matematică din Timişoara* s-a publicat soluţia problemei 537 cu următorul enunţ:

Dacă $n = 6m + 1$, atunci:

$$(x+1)^n - x^n - 1$$

se divide prin:

$$P^2 = (x^2 + x + 1)^2.$$

Iată o soluţie foarte elementară a acestei probleme. Observ că:

$$(1) \qquad (x+1)^3 = (x+2)P - 1 = mult.\ P - 1$$

$$(2) \qquad x^3 = (x-1)P + 1 = mult.\ P + 1$$

sau ridicând la puterea $2n$:

$$(3) \qquad (x+1)^{6n} = mult.\ P + 1$$

$$(4) \qquad x^{6n} = mult\ P + 1\ .$$

Inmulţind pe (3) cu $x+1$ şi pe (4) cu x, avem:

$$(x+1)^{6n+1} = mult.\ P + x + 1$$

$$x^{6n+1} = mult.\ P + x,$$

pe care scăzându-le una din alta, obţinem:

$$(5) \qquad (x+1)^{6n+1} - x^{6n+1} - 1 = mult.\ P\ .$$

Scad (4) din (3) şi obţin:

$$(6) \qquad (x+1)^{6n} - x^{6n} = \text{mult. P}\ ,$$

ceia ce rezolvă complect problema, căci (6) este derivata lui (5) înpărţită prin $6n+1$.

Se vede că problema s-a putut rezolva pe o cale foarte apropriată căilor uzitate în aritmetică.

Cu această ocazie s-a pus în evidenţă că:

$$(x+1)^{6n} - x^{6n}$$

se divide prin $x^2 + x + 1$.

Urmând această cale se pot pune în evidenţă şi alte proprietăţi analoage. De exemplu, dacă se ridică egalităţile (1) şi (2) la puterea $2n-1$, se găseşte:

$$(x+1)^{6n-3} = mult.\ P - 1$$

$$x^{6n-3} = mult.\ P + 1\ ,$$

de unde se deduce imediat, înmulţind pe fie-care din aceste egalităţi cu $(x+1)^2$ şi apoi adunând:

$$(x+1)^{6n-1} - (x+1)^{6n-1} - 1 = mult.\ P\ .$$

Aşa că prima parte a problemei 537 se poate enunţa astfel:

Ori-care ar fi n, expresiunile:

$$(x+1)^{6n\pm1} - x^{6n\pm1} - 1$$

se divid prin $x^2 + x + 1$.

Dacă se ridică egalităţile (1) şi (2) respectiv la puterile p şi q şi se adună sau se scad, după cum p este nepereche sau pereche, avem următoarea proprietate:

Suma $x^2 + x + 1$ *divide pe:*

$$(x+1)^{3p} + x^{3q},$$

când p este impar şi pe:

$$(x+1)^{3p} - x^{3q},$$

când p este pereche.

In fine toate aceste probleme se pot generaliza dacă se pune:

$$x = \frac{y}{z}\ .$$

Cu această substituţie se obţin următoarele probleme interesante:

$1^0.$ $\qquad (y+z)^{6n+1} - y^{6n+1} - z^{6n+1}$

se divide prin $(y^2 + yz + z^2)^2$.

2°. $(y+z)^{6n\pm1} - y^{6n\pm1} - z^{6n\pm1}$

se divid prin (y^2+yz+z^2).

3°. *Suma* y^2+yz+z^2 *divide pe:*

$$z^{3q}(y+z)^{3p} + z^{3p}y^{3q},$$

când p este nepereche şi pe:

$$z^{3q}(y+z)^{3p} - z^{3p} - z^{3p}y^{3q},$$

când p este pereche.

In această ordine de idei, atrag atenţia asupra problemei 4232 din *Gazeta Matematică* Vol. XXVIII, pag. 279, în care se cere condiţia pentru ca:

$$(z+y)^n + (-x)^n + (-y)^n$$

să se dividă prin x^2+xy+y^2 şi apoi condiţia ca aceiaşi sumă să se dividă prin $(x^2+xy+y^2)^2$.

Voi reveni asupra problemei 537, care mi-a dat prilegul să găsesc unele relaţiuni interesante de analiză conbinatoare.

O NOUA TEORIE A INTINDERII UNIVERSULUI

De

GHIŢESCU SPIRIDON

profesor secundar.

Această teorie, deşi foarte recentă, a suferit numeroase lovituri. Ele provin din contro-verse: din interpretările posibile ale mişcărilor aparente ale nebuloaselor spirale, din faptul dacă lumea este finită sau infinită, din modelele statice sau dinamice ale Universului, din aplicarea teoriei relativităţii restrânse sau generalizată la concepţia structurii lumii.

Einstein a propus dela început concepţia sa statică unei lumi finite, dar nelimitată; în acest Univers, ansamblu corpurilor cereşti nu presintă mişcări sistematice apreciabile, nici mişcări întâmplătoare ci viteze mari relative; materia este repartizată foarte puţin uniform; spaţiul sferic (sau eliptic) rămâne totdeauna identic cu el însuşi; raza lui este proporţională cu masa. Relativitatea generalizată ne dă rapoarte cari permit să se calculeze dimensiunile acestui Univers, dacă se cunoaşte densitatea mijlocie a materiei din care este format. Se capătă astfel o întindere de ordinul 10—100 miliarde ani-lumină.

W. Sitter a propus o altă concepţie statică a Universului. Este vid, în sensul că densitatea mijlocie a materiei este presupusă foarte mică; are curbură nu numai în spaţiu dar şi în timp. In anumite regiuni, timpul se opreşte la un „orizont" care va fi un fel de barieră; lumina unui astru îndepărtat trebuie să pară observatorului, mai roşie decât aceea a unui astru de acelaş fel, dar mai apropriat.

Insă, de câţiva ani, se observă o deplasare către roşu a liniilor spectrale a nebuloaselor spirale. Interpretată cu ajutorul principiului lui *Doppler-Fizeau*, această deplasare arată existenţa vitezelor radiale positive enorme, atingând până la 24.000 km. pe secundă. Aceste nebuloase par că se depărtează de noi cu viteze cu atât mai mari cu cât ele se găsesc la distanţe mai depărtate; vitezele acestor nebuloase cari se depărtează sunt aproximativ proporţionale cu distanţele lor.

Abatele *Lemaître*, a propus şi el un nou sistem de Univers, care nu este static, ci dinamic. Este faimoasa teorie a *„Universului în expansiune"*: în acest Univers, raza spaţiului variază cu timpul şi cu densitatea mijlocie a Universului. Cu dilataţia spaţiului, această densitate tinde către zero. Este vorba prin urmare de un spaţiu finit şi închis, întrega teorie fiind bazată pe ecuaţiile relativităţii generalizată ale lui *Einstein*. După teoria lui *Lemaître*, raza Universului va fi dublată în 2 miliarde de ani.

Einstein aderă atunci la ideea unui Univers dinamic. Dar concepţia sa diferă de aceea a lui *Lemaître*. El revine la un spaţiu infinit. In toate ecuaţiile cosmologice ale lui *Einstein* figurează un mare λ (lambda), numit „constanta cosmologică", care leagă curbura şi densitatea Universului: constantă în concepţia veche a lui *Einstein* şi variabilă în teoria „Universul în expansiune" a lui *Lemaître*. Acum *Einstein* propune $\lambda = 0$. „Metrica" spaţiului se exprimă prin ecuaţia $ds = R^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) + c^2 dt^2$; în această ecuaţie R depinde de timp. Curbura spaţiului devine nulă, dar scara distanţelor cosmice variază cu timpul. *Einstein* a arătat că, servindu-ne de această nouă formulă, se poate ajunge la fenomenul numit *„recesia"* nebuloaselor spirale.

Astronomul englez *E. A. Milne* propune acum o altă metodă de a rezolvi problema cosmologică şi de a explica expansiunea nebuloaselor spirale. Este vorba să se facă faţă diverselor dificultăţi ale tentativelor anterioare. Până acum nu s'a demonstrat că toate nebuloasele spirale depărtate au viteze cari satisfac legii distanţelor. Pe de altă parte, nu există nici o raţiune ca să nu considerăm aceste viteze ca născute în câmpul gravitaţional: dacă distribuţia vitezelor poate fi explicată cu ajutorul gravitaţiei, modelul static trebuie să cedeze locul unui model dinamic. Aşa fiind, se pare că nu există cazul aci: distribuţia vitezelor nebuloaselor spirale prezintă mai mult aspectul unui fenomen pur cinematic, fenomen determinat exclusiv de energia cinetică a sistemului şi nu prin acţiunea forţelor gravitaţionale. In concepţiile anterioare ale Universului, expansiunea maselor cosmice n'a putut fi explicată prin acţiunea gravitaţiei, şi diferitele soluţiuni propuse, tratau expansiunea nu ca un atribut al vitezelor materiei, ci ca un atribut metric al spaţiului. Soluţiunile dinamice ale problemei expansiunei Universului nu sunt în realitate decât soluţiuni cinematice îmbrăcate cu relativitatea generalizată. Din moment ce distribuţia vitezelor maselor în câmpul ceresc nu este determinată de un câmp gravitaţional, nu este natural să se caute soluţia problemei cosmologice ca o soluţie cinematică.

Incercarea lui *Milne* nu este altceva decât o tentativă de a da o soluţie cinematică problemei cosmologice. Pentru el, această problemă întră în faza sa cinematică. Deasemenea legile lui *Kepler* ne dau o bază cinematică explicaţiei dinamice ulterioare. Dacă expansiunea nebuloaselor spirale este realmente universală, atunci trebuie să fie tratată din punct de vedere cinematic.

Milne arată că expansiunea urmând legea distanţelor se prezintă ca un fenomen cinematic necesar pentru orice sistem care nu se găseşte în stare de echilibru şi compus din particule care se mişcă libere într'un spaţiu infinit, fără să se agite reciproc una pe alta. Astfel se explică mişcarea visibilă a nebuloaselor spirale şi legea vitezelor proporţionale cu distanţele; se vorbeşte, de data aceasta, de o mişcare într'un spaţiu vid euclidian, nici curb, nici închis, nici finit. Dar legea însăşi a vitezelor, la *Milne*, nu este identică cu aceea din teoria lui *Lamaître*, şi, din acest punct de vedere, teoria lui *Milne* presintă o originalitate remarcabilă.

Presupunem că particulele sistemului caracterizat printr'o distribuţie a vitezelor se găseşte, la un moment iniţial, închise într'o parte finită a spaţiului, de exemplu într'o sferă finită cu raza r_0. Din cauza vitezelor lor, ele vor ieşi din suprafaţa sferică pentru a difuza spaţiul vid. Şi pentrucă nu există între ele nici o acţiune mutuală, aceste particule se vor găsi distribuite după anumite „fronturi" de viteze. Particulele cele mai rapide se vor găsi după un oarecare timp la distanţe foarte mari şi pe o suprafaţă sferică în expansiune. In spatele lor se vor găsi distribuite alte serii de particule după vitezele lor, cari vor fi mult mai mici. Expansiunea întregului sistem se va face într'un spaţiu vid exterior. Legea vitezelor acestei expansiuni face ca distanţa unei serii de particule să fie proporţională nu numai cu vitezele acestei serii, dar şi cu timpul, fie cu durata expansiunii dacă distanţa r la punctul iniţial devine suficient de mare în raport cu r_0. Legea expansiunii se va reprezenta astfel prin formula $r = v.t$, v fiind viteza particulelor şi t timpul expansiunii, având astfel $v = \frac{r}{t}$. Rezultă din această formulă că vitezele sunt proporţionale cu distanţele, dar invers proporţionale cu timpul de expansiune. Legea expansiunii aparente a nebuloaselor spirale, este că vitezele sunt proporţionale cu distanţele şi că aceste viteze pot lua toate valorile posibile cuprinse între zero şi infinit.

Observaţiile arată că vitezele nebuloaselor spirale cresc dela 500 kilometri pe secundă până la 3,25 milioane ani-lumină, ceeace face 300.000 km. pe secundă pentru o distanţă de 2 miliarde ani-lumină. Insă, 300.000 km. pe secundă, este viteza luminii, deci o limită absolută, după teoria relativităţii restrânse. Dacă se inversează spontan vitezele tuturor nebuloaselor schimbând semnul lor în negativ, expansiunea se transformă într'o contractare şi în timp de 2 miliarde ani-lumină, vitezele vor deveni nule, astfel că sistemul va ajunge cu un volum minimum, după care expansiunea va începe din nou. La o epocă departată de noi cu 2

miliarde de ani-lumină, masele Universului nostru vor trece o astfel de fază critică. Orice soluție a problemei cosmologice trebuie să cerceteze importanța acestei date de 2 miliarde ani-lumină. Este remarcabil faptul că geologii evaluează azi 2 miliarde ani, ca vârsta Pământului nostru. Este o dată interesantă în legătură cu problema noastră cosmologică.

Milne găsește soluția problemei cosmologice într'o oarecare funcție a distribuției pozițiilor și vitezelor; cunoașterea acestei viteze permite observatorului să-și dea seama de distribuția particulilor și de vitezele lor la orice moment. Funcțiunea dă o imagine perfectă cinematică a lumii și de desvoltarea ei se ține socoteală în evoluția timpului. Ea posedă oarecari proprietăți fixe cu privire la toate variațiile de poziție ale observatorului, admisibile în cadrul teoriei relativității restrânse, din punct de vedere al locului și al vitezei.

Imaginea lumii rezultând din soluția lui *Milne*, are însemnătate și conține următoarele caractere: masele Universului nu umplu încă în mod uniform spațiul, dar se găsește numai într'o singură parte din el. Masele se găsesc într'un proces de difuziune care se resfrânge și în spațiul cosmic vid.

Noua teorie a lui *Milne*, cu toate că era destinată să interpreteze oarecari fapte astronomice, studiate insuficient din punct de vedere experimental, prezintă un avantagiu considerabil în raport cu celelalte teorii cosmologice anterioare. Ea poartă mai puțin ca celelalte urmele simbolismului matematic și romantismului științific care, în oarecarl teorii științifice moderne, au înlocuit o explicație reală a fenomenelor prin acele abstracțiuni mistice ale Evului-Mediu. Teoria lui *Milne* este o teorie vivantă și vitală. Totuși, astronomul german *Erwin Greundlich* privește cu neîncredere această nouă teorie.

In general s'au creiat teorii cosmologice foarte grele, chiar imposibile de perceput, în raport cu cunoștiințele noastre. *W. Sitter*, care propusese și el o faimoasă teorie foarte adesea citată, a făcut câteva observări interesante în raport cu acest subiect, la Universitatea din Londra: „*Nu trebuie să se uite că toate aceste consideratiuni asupra Uviversului implică o imaginație înspâimântătoare, poate chiar periculoasă. Noi nu cunoaștem, fără îndoială, decât o mică porțiune din Universul nostru. Tot ce știm despre Univers dincolo de vecinătatea noastră, fie în timp, fie în spațiu, sunt simple extrapolațiuni. Clădind o nouă teorie a Universului, trebuie să admitem câteva extrapolațiuni, alegându-le în așa fel, încât să corespundă cu gustul nostru filosofic*".

Sistemul lui *Milne* presintă încă acest avantagiu asupra concepției statice a lui *Einstein* cât și asupra modelului dinamic a lui *Lemaître*, că nu îngrădește Universul într'un spațiu curb, finit și închis, imaginat pentru a resolvi câteva dificultăți, în legătură cu problema cosmologică. In concluzie deci, această problemă nu a căpătat până acum o soluție definitivă.

NOTE MATEMATICE

17. — *Formules relatives au triangle.*

Soient un triangle ABC, (BC = a, CA = b, AB = c), $2p$ le périmètre, S la surface, R, r, r_a, r_b, r_c les rayons des cercles tritangents.

1. Des expressions de la surface:

$$S = (p-a)\,r_a = (p-b)\,r_b = (p-c)\,r_c,$$

on déduit:

$$a\,r_a + b\,r_b + c\,r_c = p\,(r_a + r_b + r_c) - 3\,S,$$

d'où la formule suivante:

$$(1)\quad a\,r_a + b\,r_b + c\,r_c = p\,(4\,R + r) - 3\,S = 2\,p\,(2\,R - r).$$

2. On a aussi:

$$\frac{a}{r_a} = \frac{a\,(p-a)}{S},\quad \frac{b}{r_b} = \frac{b\,(p-b)}{S},\quad \frac{c}{r_c} = \frac{c\,(p-c)}{S},$$

et:

$$\frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c} = \frac{1}{S}\,[\,p\,(a+b+c) - (a^2+b^2+c^2)\,]$$

$$= \frac{1}{S}\,[\,2\,p^2 - (a^2+b^2+c^2)\,].$$

En tenant compte de l'expression classique:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2\,p^2 - 8\,R\,r - 2\,r^2,$$

il vient finalement:

$$(2)\qquad \frac{a}{r_a} + \frac{b}{r_b} + \frac{c}{r_c} = \frac{2}{p}\,(4\,R + r).$$

BIBLIOTECA ASTRA SIBIU

3. De la relation (2) on déduit les suivantes:

$$p\left(\frac{a}{r_a}+\frac{b}{r_b}+\frac{c}{r_c}\right)=2(r_a+r_b+r_c)$$

ou:

$$(a+b+c)\cdot(a\,r_b\,r_c+b\,r_c\,r_a+c\,r_a\,r_b)=$$
$$4\,r_a\,r_b\,r_c\,(r_a+r_b+r_c).$$

M V. THÉBAULT
LE MANS (FRANCE)

18. — *Rectificarea soluției problemei 889.*

In soluția pe care am dat-o problemei 889 în numărul trecut la pag. 91 și 92 s-au strecurat două erori foarte regretabile și de aci s au dedus concluzii false. D-l *C. Coșniță* (Bârlad) într'o scrisoare cu data de 21/X. a. c., mi-a atras atenția asupra acestor erori și mi-a trimis și o soluție analitică cu rezultate exacte. I-i mulțumesc pe această cale de rectificarea pe care o provoacă și aștept să ne trimită soluția geometrică a problemei, așa cum anunță în scrisoare, soluție pe care i-o vom publica cu plăcere.

In cele ce urmează ne vom referi la figura de la pagina 91.

Erorile care s-au strecurat sunt următoarele:

S-a scris:

$$OM=d\cos\omega,$$

în loc de:

$$OM=\frac{d}{\cos\omega},$$

(remarcată de d-l C. Coșniță), iar relațiunea care exprimă că punctele L, P divid armonic segmentul MO s-a scris sub forma:

$$\frac{LO}{LM}=\frac{PO}{PM}$$

fără a ține seamă de semne, în loc de:

$$\frac{LO}{LM}=\frac{-PO}{PM}.$$

Ținând seamă de aceste rectificări, relația (2) de la pagina 92 devine:

$$\varrho=\frac{d\,R^2\cos\omega}{2\,R^2\cos^2\omega-d},$$

care este ecuația unei conice. Eliminând pe ω și ϱ între această ecuație și:

$$x=\varrho\cos\omega \quad ; \quad x^2+y^2=\varrho^2,$$

se găsește ecuația cartezianã:

(C) $\qquad (d^2-2R^2)x^2+d^2y^2+d\,R^2x=0,$

care reprezintă:

Elipsă, când: $d<-R\sqrt{2}$ sau $+R\sqrt{2}<d$

Hiperbolă, când: $-R\sqrt{2}<d<R\sqrt{2}$

Parabolă, când: $d=\pm R\sqrt{2}$

Drepte suprapuse, când: $d=0$.

Iată soluția directă în coordonate carteziene.

Se iau axele OM_1 și OJ. Fie $M(\alpha,\beta)$, $P(x_1,y_1)$ și O′ mijlocul lui OM. Patrulaterul MAOB este înscris în cercul de diametru OM, deci:

$$\sphericalangle O'AO=\sphericalangle O'OA.$$

Apoi în triunghiul dreptunghic DAE, avem:

$$\sphericalangle ODP=\sphericalangle PAD,$$

căci PA este mediană. Rezultă că $\sphericalangle PAD$ este suplimentar cu $\sphericalangle O'AO$, deci $PA\perp O'A$. La fel se arată că $PB\perp O'B$. Deci *P este polul dreptei AB față* de cercul O′. D-l *C. Coșniță* deduce această proprietate din observația că P și L înpart armonic diametrul OM al cercului O′. Dar AB fiind și polara lui M față de O, are ecuația:

(1) $\qquad \alpha x+\beta y-R^2=0.$

Ecuația lui O′ fiind:

(2) $\qquad f(x\,y)=x^2+y^2-\alpha x-\beta y=0,$

polul $P(x_1,y_1)$ al lui (1) față de (2) este dat de ecuațiile:

$$\frac{f'_{x_1}}{\alpha}=\frac{f'_{y_1}}{\beta}=\frac{f'_{z_1}}{-R^2}$$

sau, după înlocuire:

$$\frac{2x_1-\alpha}{\alpha}=\frac{2y_1-\beta}{\beta}=\frac{\alpha x_1+\beta y_1}{R^2}.$$

Eliminând pe α,β între aceste ecuații și:

$$\alpha=d=OM_1$$

și trecând la coordonate curente, se regăsește ca loc al lui P, conica (C) deja găsită mai sus.

D-l *C. Coșniță* în soluția sa ia axele ori cum față de Δ, deci Δ are ecuația:

$$Ax+By+C=0.$$

Caută apoi polara lui P față de O′, o identifică cu (1) și găsește ecuația locului sub forma:

$$(2A^2R^2 - C^2)x^2 + (2B^2R^2 - C^2)y^2 + 4ABR^2xy + ACR^2x + BCR^2y = 0,$$

care se reduce la (C) dacă se face:

$$A = 1 \quad ; \quad B = 0 \quad ; \quad C = -d.$$

COL. GH BUICLIU

19. — *Asupra problemei 813.*

Cu ocazia rezolvirei acestei probleme (R. M. T., Vol. XIII, pag. 21) s'a arătat că triunghiurile ABC, cari se bucură de a treia proprietate enunțată, satisfac următoarei relațiuni:

$$(1) \quad (c^2 + b^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2) = 2b^2(a^2 + c^2 - b^2),$$

a, b, c fiind laturile triunghiului.

Imi propun să transform această condițiune, spre a găsi proprietăți noi ale acestor triunghiuri, arătând astfel corespondenților interesul pe care-l prezintă aprofundarea unui rezultat găsit, oricât de simplu ar fi el, ceiace formează în general cheia de boltă a descoperirei de noui adevăruri.

Să considerăm formulele bine cunoscute:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \quad \text{etc.}$$

Cu acestea, relația (1) devine:

$$(2) \qquad \cos A \cos B = \cos C$$

sau, fiindcă $\cos C = -\cos(A + B)$,

$$(3) \qquad \operatorname{tg} A \operatorname{tg} C = 2.$$

Identitatea cunoscută:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C,$$

devine:

$$(4) \qquad \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} B.$$

Relațiile (3) și (4) arată că $\operatorname{tg} A$ și $\operatorname{tg} C$ sunt rădăcinile ecuației:

$$z^2 - z\operatorname{tg} B + 2 = 0,$$

cari sunt reale numai dacă:

$$\operatorname{tg} B \geq \sqrt{8}$$

$$B \geq 70^\circ\, 31'\, 43'',6,$$

egalitate având numai pentru triunghiul isoscel ($A = C$).

Relația (2) mai arată că unghiurile A, B, C sunt *toate* ascuțite, căci dacă unul din ele ar fi obtus, ar trebui ca un al doilea să fie deasemeni obtus, ceia ce e imposibil.

Ș — se poate continua. M. G.

20. — *O problemă veche.*

(Cu ocazia împlinirii a 150 de ani dela moartea lui *L. Euler*).

Matematicianul elvețian *Niclaus Bernoulli* (1687—1759) a propus problema de mai jos, pe care marele *Euler* a rezolvat-o în mod independent, numind-o *„quaestio curiosa ex doctrina combinationis"*.

Iată enunțul acestei probleme, numită și „Problema scrisorilor încurcate":

Cineva scrie n scrisori și pe n plicuri scrie adresele corespunzătoare. In câte feluri poate el să pue toate scrisorile în plicurile care nu le corespund?

Numim scrisorile cu a, b, c, ..., iar plicurile corespunzătoare A, B, C, ...

Fie $\overline{n}$ numărul cazurilor posibile (toate scrisorile puse în alte plicuri).

Formăm un grup din toate cazurile când a este în B și b în A, și un al 2-lea grup din toate cazurile când a este în B și b *nu este* în A. Grupul 1-âi cuprinde, evident, $\overline{n-2}$ cazuri.

Grupul al 2-lea se poate trata astfel: în loc de $b, c, d, e, \ldots$ și A, C, D, E, ..., vom scri $b', c', d', e', \ldots$ și B′, C′, D′, E′, ... Vor fi, cu alte cuvinte, $\overline{n-1}$ cazuri.

Deci, numărul cazurilor în care a *este în* B, $= \overline{n-1} + \overline{n-2}$. Dar tot atâtea cazuri sunt când avem a în C, sau a în D, etc. Rezultă, pentru numărul tuturor cazurilor:

$$\overline{n} = (n-1)\left[\overline{n-1} + \overline{n-2}\right],$$

sau:

$$\overline{n} - n\cdot\overline{n-1} = (-1)\left[\overline{n-1} - (n-1)\cdot\overline{n-2}\right].$$

Avem, începând cu $\overline{3}$:

$$\overline{3} - 3\cdot\overline{2} = (-1)\left[\overline{2} - 2\cdot\overline{1}\right],$$

$$\overline{4} - 4\cdot\overline{3} = (-1)\left[\overline{3} - 3\cdot\overline{2}\right],$$

. . . . . .

$$\overline{n} - n\cdot\overline{n-1} = (-1)\left[\overline{n-1} - (n-1)\cdot\overline{n-2}\right].$$

Inmulţind aceste egalităţi membru cu membru rezultă, după unele reduceri:

$$\overline{n} - n \cdot \overline{n-1} = (-1)^{n-2}\left[\overline{2} - 2 \cdot \overline{1}\right],$$

sau, deoarece:

$$\overline{1} = 0, \quad \overline{2} = 1 \quad \text{şi} \quad (-1)^{n-2} = (-1)^n,$$

$$\overline{n} - n \cdot \overline{n-1} = (-1)^n.$$

Impărţim prin $n!$:

$$\frac{\overline{n}}{n!} - \frac{\overline{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Punând, pe rând, în locul lui n, 2, 3, 4, ... n, avem:

$$\frac{\overline{2}}{2!} - \frac{\overline{1}}{1!} = \frac{(-1)^2}{2!}$$

$$\frac{\overline{3}}{3!} - \frac{\overline{2}}{2!} = \frac{(-1)^3}{3!},$$

. . . . . .

$$\frac{\overline{n}}{n!} - \frac{\overline{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Adunăm aceste egalităţi ($\overline{1} = 0$):

$$\frac{\overline{n}}{n!} = \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Deci, avem formula finală:

$$\overline{n} = n!\left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - , \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right].$$

Exemplu:

$$\overline{4} = 4!\left[\frac{1}{2!} \quad \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right] =$$

$$24\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = \frac{24 \times 9}{24} = 9.$$

PETRE V. CAZANACLI

CHESTIUNI DE EXAMEN ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA

Examen de întrare în anul pregătitor, Octombrie 1933.

GEOMETRIE.

Se dau două cercuri O_1 şi O_2 de raze R_1 şi R_2, astfel că:

$$\overline{O_1 O_2}^2 = R_1^2 + R_2^2 \quad , \quad (R_2 < R_1)$$

1°. Să se arate că cercurile O_1 şi O_2 sunt secante.

2°. Fie A şi B punctele unde se taie cercurile O_1 şi O_2, S punctul unde se întâlnesc tangentele lor comune exterioare, M şi N punctele unde S A şi S B taie a doua oară cercul 1 descris pe diametrul $\overline{O_1 O_2}$. Să se demonstreze că O_1 M O_2 N este un patrat.

3°. R şi T fiind punctele unde A N taie respectiv cercurile O_2 şi O_1, iar A_2 şi A_1 punctele unde A O_2 şi A O_1 taie respectiv pe O_2 şi O_1, să se arate că triunghiurile A R A_2 şi A T A_1 sunt isoscele.

4°. In cazul când $R_1 = 12$ m şi $R_2 = 5$ m. să se calculeze suprafaţa patratului O_1 M O_2 N cu o eroare mai mică ca 0,000001

5°. Să se calculeze distanţa coardei comune $\overline{A B}$ la centrul I şi lungimea coardei $\overline{A B}$.

6°. Să se calculeze distanţa $\overline{S I}$.

7°. Să se arate că dreptele A N şi B M se taie într'un punct E situat pe O_1 O_2. Să se calculeze distanţele $\overline{E I}$ şi $\overline{E S}$. (23 Octomvrie, $8^{30} - 11^{30}$)

ALGEBRĂ şi TRIGONOMETRIE.

I.

Să se determine un număr de patru cifre, având ultimele două cifre egale, ştiind că:

1°. Suma cifrelor sale este 16.

2°. Suma între numărul format din primele două cifre şi numărul format din ultimele două cifre este 52.

3°. Diferenţa între patratul cifrei zecilor şi patratul cifrei miilor este 8.

II.

Se dă ecuaţiunea:

$$a x^2 + x + 2 = 0,$$

cu rădăcinele x' şi x''.

1. Se cere a se forma o altă ecuaţiune de gradul al 2-lea, având rădăcinele:

$$y' = \frac{1}{x' + 1} \quad , \quad y'' = \frac{1}{x'' + 1}$$

2°. Să se determine a astfel ca ecuaţiunea de gradul al 2-lea formată, să aibă rădăcinele sale egale,

III.

1. Să se demonstreze că dacă într'un triunghiu A B C avem relaţia:

$$\cot \frac{B}{2} = \frac{a + c}{b},$$

el este dreptunghic.

2. Să se rezolve un triunghiu dreptunghic, ştiind că ipotenuza sa este de 15 cm. şi diferenţa catetelor sale este de 3 cm. (23 Octomvrie, 3—6)

ARITMETICĂ.

Un loc de construcţie, a fost împărţit în trei parcele dreptunghiulare: A, B, C.

Parcelele A şi B de aceiaşi lungime, dar parcela B este cu 6 m mai largă de cât parcela A.

Parcelele B şi C de aceiaşi lărgime, dar lungimea parcelei C este cu 6 m mai mare de cât lărgimea parcelei B.

Cele trei parcele au fost vândute cu acelaşi preţ metrul patrat. Se cere:

1º. Dimensiunile fiecărei parcele.

2º. Preţul de vânzare al unui metru patrat, ştiind că:

parcela A a fost vândută cu 226665 — lei
„ B „ „ „ 301185 — lei
„ C „ „ „ 201757,50 lei

II.

Cineva îşi împarte capitalul în trei părţi. Prima o depune pe timp de 2 ani şi 8 luni cu 4,50%, a doua care este îndoitul celei dintâi, o depune pe timp de 3 ani şi 4 luni cu 6%, iar a treia care este întreitul celei dintâi o depune pe timp de 1 an şi 6 luni cu 5%. Dobânda adusă de cele trei părţi este 171460 lei.

Se cere valoarea capitalului iniţial.

(24 Octomvrie, 8³⁰ — 11)

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXIX, No. 2, Octomvrie 1933. Sur les points de *Feuerbach*, par *V. Thébault*. Cărţi vechi de matematică, de *I. Ionescu*. Raportul comisiunei pentru acordarea premiului *„General Sc. Panaitescu"* pe anul 1932—1933; de *Col. Gh. Buicliu, Ing. C. Orăşeanu, Col. G. Potopeanu*.

2. *Boletin Matematico*. anul VI, No. 4, Iunie 1933, din Buenos-Aires, fondat şi redactat de *Dr. Bernardo I. Baidaff*. Teoria matematică a gamei muzicale, de *A. E. Sagastume Berra*. Elemente de Teratologia geometrică, de *B. I. Baidaff*.

PROBLEME REZOLVATE

1139. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} xy+yz+zx=11 \\ x^2+y^2+z^2+x^2y^2z^2=50 \\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=49 \end{cases}$$

IOAN CURCHI

Sistemul dat se poate scri încă:

$$\begin{cases} xy+yz+zx=11 \\ (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)+x^2y^2z^2=50 \\ (xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)=49 \end{cases}$$

Ecuaţia 2-a şi 3-a a acestui sistem, ţinând seamă de prima se simplifică, şi avem sistemul:

$$(1)\quad \begin{cases} xy+yz+zx=11 \\ (x+y+z)^2+x^2y^2z^2=72 \\ xyz(x+y+z)=36 \end{cases}$$

Notând:

$$\begin{cases} x+y+z=u \\ xyz=v \end{cases}$$

ultimele două ecuaţii din (1) devin:

$$\begin{cases} u^2+v^2=72 \\ uv=36 \end{cases}$$

Multiplicând a 2-a ecuaţie cu 2 şi adunând'o şi scăzând'o din prima, obţinem:

$$\begin{cases} u+v=\pm\sqrt{144}=\pm 12 \\ u-v=0 \end{cases}$$

De aci deducem prin adunare şi scădere:

$$u=v=\pm 6.$$

Sistemul (1) este deci echivalent cu următorul:

$$\begin{cases} x+y+z=\pm 6 \\ xy+yz+zx=11 \\ xyz=\pm 6 \end{cases}$$

x, y, z sunt deci respectiv soluţiile ecuaţiilor:

$$t^3-6t^2+11t-6=0$$
$$t^3+6t^2+11t+6=0.$$

Aceste ecuaţii descompuse în factori, devin:

$$(t-1)(t-2)(t-3)=0$$
$$(t+1)(t+2)(t+3)=0$$

Rezultă că sistemul dat admite următoarele 12 sisteme de soluţii:

x	± 1	± 1	± 2	± 2	± 3	± 3
y	± 2	± 3	± 1	± 3	± 1	± 2
z	± 3	± 2	± 3	± 1	± 2	± 1

Soluţii date de d-rele: *Antoniu V. Emilia* (lic. Oltea-Doamnă, Iaşi), *Naneş Cornelia* (Şc. Centrală, Bucureşti) şi de d-nii: *Amărăşteanu F. Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Birek Vasile* (lic. Beiuş), *Carp Ignat* (Sub-Lt., Aviaţie), *Chiriac C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Chiriţă Mihail* (lic. Milit., Craiova), *Ciancilian A.* (Balcic), *Coandă I. Virgil* (lic

Milit., Craiova), *Cojocaru M*, *Constantin G. Petre* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Cosman Alexandru*, *Cuzin Laurenţiu* (lic. Milit, Iaşi), *Deniş C-tin* (lic. Roman), *Dima A. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Gheorghiu Alexandru* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Ghiocel V. Vasile* (lic. Giurgiu), *Godeanu Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Hascal Herman* (lic. Roman), *Ilie C. Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Imecs Martin* (Cluj), *Ionescu Emil* (bacalaureat), *Ivănescu Cezar* (bacalaureat, Bârlad), *Lăţea P. C-tin* (Şc. milit., de Artilerie), *Lupescu Gh. Corneliu* (lic. Roman), *Mazilu Panait* (lic. Internat, Iaşi), *Mârza C. Vasile* (Şc. Polit., Timişoara), *Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Mehedinţi D-tru* (lic. milit., Tg. Mureş), *Mereuţă Emilian* (student, Bucureşti), *Mihalcea N. Nicolae* (lic. Beiuş), *Negrea A. Leonte-Mircea* (licenţiat în Matematici), *Nenciulescu H.* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Pănoiu Emanoil* (student), *Păunescu N.* (lic. Milit., Craiova), *Popa Nicolaie* (lic. Beiuş), *Popa D. Traian*, *Popescu Adrian* (student), *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit., Craiova), *Predoescu I. Marin* (lic. Buzeşti, Craiova), *Racoţeanu Ion* (lic. Milit., Craiova), *Sandovici Vasile* (lic. Internat, Iaşi) *Santto F. Georges* (lic. Internat, Iaşi), *Sâmbotin Gh.* (Sub-Lt.), *Segărceanu M. Marin* (lic. Milit., Craiova), *Ştefănescu Anibal* (Şc. Polit., Bucureşti), *Stoica Ioan* (Sub-Lt). *Theohariade Lucian* (Şc. Preg. de Ofiţeri), *Tica P. Marin* (Sub-Lt), *Trică S. Ioan* (Caransebeş), *Ţarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş) şi *Vasiliu-Leoben Gh.* (Inginer).

1143. — *Să se arate că în orice triunghiu avem:*

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{(c-a)(c-b)(b-a)} = \frac{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}{\left(\cot\frac{A}{2}-\cot\frac{B}{2}\right)\left(\cot\frac{A}{2}-\cot\frac{C}{2}\right)\left(\cot\frac{B}{2}-\cot\frac{C}{2}\right)},$$

notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

ION MARGINEANU

Notând cu E membrul al 2-lea şi ţinând seamă de relaţiile cunoscute:

$$\cot\frac{A}{2}=\frac{p-a}{r}, \qquad \cot\frac{B}{2}=\frac{p-b}{r},$$

$$\cot\frac{C}{2}=\frac{p-c}{2}$$

(Compléments de Trigonométrie, par „F. G. M) pag. 176), putem scri succesiv:

$$E=\frac{\frac{p-a}{r}\cdot\frac{p-b}{r}\cdot\frac{p-c}{r}}{\left(\frac{p-a}{r}-\frac{p-b}{r}\right)\left(\frac{p-a}{r}-\frac{p-c}{r}\right)\left(\frac{p-b}{r}-\frac{p-c}{r}\right)}=$$

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{(b-a)(c-a)(c-b)},$$

şi astfel relaţia dată este stabilită.

Soluţii date de d-rele: *Antoniu V. Emilia* (lic. Oltea Doamnă, Iaşi), *Roşca Şt. Veronica* şi de d-nii: *Băleanu D.* (Şc. Milit. de Artilerie), *Bileţchi Mircea* (Şc. Polit., Timişoara), *Boisnard Jean* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Casovliu Ştefan* (lic. Milit., Chişinău), *Chiriac C-tin* (lic. Milit, Iaşi), *Chiriţă Mihail* (lic. Milit., Craiova), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M.*, *Constantin G. Petre* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Curchi Ioan* (student, Bucureşti), *Dan T. Traian* (Şc. Polit., Timişoara), *Dima A. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Ghiocel V. Vasile* (lic. Giurgiu), *Godeanu Ig. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Ionescu C. Emil* (bacalaureat), *Ivănescu Cezar* (bacalaureat, Bârlad), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit., de Artilerie), *Mazilu Panait* (lic. Internat, Iaşi), *Marteş V. Grigore* (lic. Milit, Chişinău), *Mereuţă Emilian*, *Negrea A. Leonte-Mircea* (licenţiat în Matematici), *Nenciulescu H.* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Patron M. Petru* (lic. Milit., Iaşi), *Pănescu N.* (lic. Milit., Craiova), *Popa B. Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Popa D. Traian*, *Popescu Adrian* (student), *Porumbescu D.* (Tg-Ocna), *Predoescu I. Marin* (lic. Buzeşti, Craiova), *Ragalschi V. Eugen* (lic. Milit., Chişinău), *Rogozan Alexandru* (Şc. Polit., Timişoara), *Sandovici Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Sâmbotin Gh.* (Sub-Lt.), *Segârcaanu M. Marin* (lic. Milit., Craiova), *Ştefănescu Anibal* (Bucureşti), *Stoica G. I.* (Sub-Lt.), *Süli Mihai* (Şc. Polit., Timişoara), *Şuşală I. Gh.* (lic. Milit., Chişinău), *Theoharide Lucian* (Şc. Preg. de Ofiţeri), *Tica P. Marin*, *Trică S. Ioan* (Caransebeş) şi *Vasiliu-Leoben Gh.* (Inginer).

1148. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x^3+64y^3=91 \\ x^2+16y^2=25 \end{cases}$$

IOAN CURCHI

Sistemul dat se mai poate scri:

$$(1) \qquad \begin{cases} (x+4y)^3-12xy(x+4y)=91 \\ (x+4y)^2-8xy=25 \end{cases}$$

Notând:

$$(2) \qquad x+4y=u, \qquad xy=v,$$

sistemul (1) devine:

$$\begin{cases} u^3-12uv=91 \\ u^2-8v=25 \end{cases}$$

Multiplicând prima ecuaţie cu 2 şi a 2-a cu 3 u şi scăzându-le, obţinem:

$$u^3-75u+182=0,$$

care se poate descompune astfel:

$$(u-7)(u^2+7u-26)=0.$$

Rezolvind această ecuaţie, găsim:

$$u_1=7, \qquad u_2=\frac{-7+\sqrt{153}}{2}, \qquad u_3=\frac{-7-3\sqrt{17}}{2}$$

Fiecare din aceste valori, introdusă în a 2-a

ecuaţie a sistemului (3), ne permite a afla valoarea corespunzătoare pentru v, astfel că sistemul (3) admite următoarele sisteme de soluţii:

$$\begin{cases} u=7 \\ v=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} u=\dfrac{-7+3\sqrt{17}}{2} \\ v=\dfrac{51-21\sqrt{17}}{16} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u=\dfrac{-7-3\sqrt{17}}{2} \\ v=\dfrac{51+21\sqrt{17}}{16} \end{cases}$$

Inlocuind aceste sisteme de valori în (2), obţinem următoarele sisteme de ecuaţiuni, echivalente cu sistemul dat:

$$(4) \qquad \begin{cases} x+4y=7 \\ xy=3 \end{cases}$$

$$(5) \qquad \begin{cases} x+4y=\dfrac{-7+3\sqrt{17}}{2} \\ xy=\dfrac{51-21\sqrt{17}}{16} \end{cases}$$

$$(6) \qquad \begin{cases} x+4y=\dfrac{-7-3\sqrt{17}}{2} \\ xy=\dfrac{51+21\sqrt{17}}{16} \end{cases}$$

Inlocuind în prima ecuaţie din (4) valoarea lui y scoasă din a 2-a ecuaţie, deducem aducând la formă întreagă şi trecând totul în primul membru:

$$x^2-7x+12=0,$$

care rezolvată ne dă:

$$x_1=3, \qquad x_2=4,$$

valori care introduse în a 2-a ecuaţie din (4), ne procură valorile corespunzătoarele pentru y. Sistemul (4) admite astfel sistemele de soluţii:

$$\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=4 \\ y=\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Analog rezolvind sistemele de ecuaţii (5) şi (6), găsim următoarele sisteme de soluţii corespunzătoare:

$$\begin{cases} x=\dfrac{-7+3\sqrt{17}+\sqrt{-2+42\sqrt{17}}}{4} \\ y=\dfrac{-7+3\sqrt{17}-\sqrt{-2+42\sqrt{17}}}{16} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{-7+3\sqrt{17}-\sqrt{-2+42\sqrt{17}}}{4} \\ y=\dfrac{-7+3\sqrt{17}+\sqrt{-2+42\sqrt{17}}}{16} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{-7-3\sqrt{17}+\sqrt{-2-42\sqrt{17}}}{4} \\ y=\dfrac{-7-3\sqrt{17}-\sqrt{-2-42\sqrt{17}}}{16} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{-7-3\sqrt{17}-\sqrt{-2-42\sqrt{17}}}{4} \\ y=\dfrac{-7-3\sqrt{17}+\sqrt{-2-42\sqrt{17}}}{16} \end{cases}$$

Soluţii date de d-nii: *Cojocaru Marius*, bacalaureat, Craiova), *Godeanu Ig. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit., de Artilerie), *Lupescu Gh. Corneliu* (lic. Roman), *Mazilu Panaite* (lic. Internat, Iaşi), *Mereuţă-Neamţ Emilian*, *Negrea A. Leonte-Mircea* (licenţiat în Matematici), *Popescu Adrian* (student), *Preda C. C-tin* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Predoessu I. Marin* (bacalaureat, Craiova), *Predoescu Traian* (lic. Milit., Craiova), *Sandovici Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Tica P. Marin-Gall* (Sub-Lt), *Ţarălungă D-tru* (lic. Milit, Tg-Mureş) şi *Vasiliu-Leoben Gh.* (Inginer).

Observare. Au găsit numai soluţiile întregi, d-nii: *Amărăsteanu Marcel* (lic. Buzeşti, Craiova), *Chiriţă Mihail* (lic. Milit., Craiova), *Ghiocel V. Vasile* (Giurgiu), *Ionescu C. Emil* (bacalaureat), *Mehedinţi D. D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Păun V. Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Săndulescu I. Ion* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Stoica Ion* (Sub-Lt).

1154. — *Să se simplifice fracţiunea:*

$$\frac{a(a^2-bc)^2+c(b^2-ac)^2}{a(a^2-bc)(b^2-ac)},$$

ştiind că:

$$a^3+b^3+c^3=3abc.$$

A. COMAN

Dezvoltând numărătorul fracţiei date, putem scri:

(1) $a(a^2 - bc)^2 + c(b^2 - ac)^2 = a^5 - 2a^3bc + ab^2c^2 + cb^4 - 2ab^2c^2 + a^2c^3 = a^2(a^3 + c^3) - 2a^3bc - ab^2c^2 + b^4c.$

Cum din relaţia de condiţie:

$$a^3 + c^3 = 3abc - b^3,$$

relaţia (1) devine:

$$a(a^2 - bc)^2 + c(b^2 - ac)^2 = 3a^3bc - a^2b^3 - 2a^3bc - ab^2c^2 + b^4c = a^3bc - a^2b^3 - ab^2c^2 + b^4c = -b[a^2(b^2 - ac) - bc(b^2 - ac)] = -b(a^2 - bc)(b^2 - ac)$$

In virtutea acestei relaţii, fracţiunea dată se poate scri succesiv:

$$\frac{a(a^2 - bc)^2 + c(b^2 - ac)^2}{a(a^2 - bc)(b^2 - ac)} = -\frac{b(a^2 - bc)(b^2 - ac)}{a(a^2 - bc)(b^2 - ac)} = -\frac{b}{a}$$

Soluţii date de d-ra: *Popescu N. Maria* (Şc. Polit, Timişoara) şi de d-nii: *Arhire Vasile* (lic. Milit, Cernăuţi) *Băbeanu D-tru*, *Bileţchi Mircea* (Şc. Polit., Timişoara), *Caraman I. C-tin* (lic. Milit, Cernăuţi), *Cişmigiu Marius* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Coşereanu Petre* (lic. Milit., Cernăuţi), *Deniş C-tin* (lic. Roman), *Dima A. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Ghiocel V. Vasile* (lic. Giurgiu), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Hascal I. Herman* (lic. Roman) *Lupescu Gh. Corneliu* (lic. Roman), *Mereuţă-Neamţ Emilian*, *Negrea A. Leonte Mircea* (licenţiat în Matematici), *Păun V. Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Popescu Adrian*, *Predoescu Traian* (lic. Milit, Craiova), *Săndulescu Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Stănescu M. Emil* (lic. Milit, Craiova), *Stănescu Iancu* (lic. Milit, Cernăuţi), *Stoica G. I.* (Şc. Milit. de Infanterie) şi *Vasiliu-Leoben Gh.* (Inginer).

1155. — *Să se rezolve ecuaţiunea:*

$$9x^3 - a^2x^4 + 2ax^2 - 1 = 0.$$

GH VASILIU LEOBEN

Ecuaţia dată se poate scri:

$$9x^8 - (ax^2 - 1)^2 = 0,$$

sau:

$$(3x^4 - ax^2 + 1)(3x^4 + ax^2 - 1) = 0.$$

Această ecuaţie este echivalentă cu următoarele două ecuaţii:

$$3x^4 - ax^2 + 1 = 0$$

$$3x^4 + ax^2 - 1 = 0$$

Rezolvind aceste ecuaţii bipatrate, avem următoarele 8 rădăcini:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - 12}}{6}},$$

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - 12}}{6}},$$

$$x_{5,6} = \pm\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + 12}}{6}},$$

$$x_{7,8} = \pm\sqrt{\frac{-a - \sqrt{a^2 + 12}}{6}}.$$

Soluţii date de d-rele: *Antoniu Emilia* (lic. Oltea Doamnă, Iaşi), *Popescu N Maria* (Şc. Polit., Timişoara) şi de d-nii: *Arbter Emil* (lic. Beiuş), *Băbeanu D-tru* (Şc. Milit., de Artilerie), *Boerescu P. George* (Şc. Pregăt. de Ofiţeri), *Budeanu C-tin* (student Matematici), *Chiriac C-tin* (lic. Milit, Iaşi), *Chiu Trifu* (Şc. Polit., Timişoara), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M. Marin* (lic. Milit., Craiova), *Crişan Iacob* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Ghiocel V. Vasile* (lic. Giurgiu), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Grama L. Marin* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Laurenţiu Cuzin* (lic. Milit., Iaşi), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Lupescu Gh. Corneliu* (lic. Roman), *Mazilu Punait* (lic. Internat, Iaşi), *Mehedinţi D-tru* (lic. Milit, Tg-Mureş), *Mereuţă-Neamţ Emilian*, *Mihalcea N. Nicolae* (lic. Beiuş), *Negrea A. Leonte-Mircea* (licenţiat în Matematici), *Păun V. Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Popa B. Ion* (Şc. Polit., Timişoara), *Popa Nicolae*, *Popescu Adrian* (student), *Preda C. C-tin* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Predoescu I. Marin* (bacalaureat, Craiova), *Predoescu Traian* (lic. Milit., Craiova), *Sâmbotin Gh.* (Sub-Lt), *Săndulescu I. Ion* (Şc. Polit., Timişoara), *Stănescu M. Emil* (lic. Milit., Craiova), *Stoica Ioan* (Sub-Lt) şi *Ţarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş).

1159. — *Să se stabilească identitatea:*

$$(2a_1 - 3a_0)\sin 2t - (a_1 - 3a_0)\sin 4t - a_0 \sin 6t = 8\sin^3 t(a_0 \cos 3t + a_1 \cos t),$$

unde a_1 *şi* a_0 *sunt numere oarecare.*

Să se verifice pentru $t = \frac{\pi}{4}$, *apoi pentru* $a_0 = 0$.

V. ALACI

Insemnând cu E primul membru al identităţii, observăm că putem scri succesiv:

(1) $E = a_1(2\sin 2t - \sin 4t) + a_0(3\sin 4t - 3\sin 2t - \sin 6t) = 2a_1 \sin 2t(1 - \cos 2t) + a_0[3(\sin 4t - \sin 2t - 2\sin 3t \cos 3t] = 4a_1 \sin 2t \sin^2 t + 2a_0(3\sin t \cos 3t - \sin 3t \cos 3t) =$

$$8\,a_1 \sin^3 t \cos t + 2\,a_0 \cos 3t\,(3 \sin t - \sin 3t)$$

Cum se cunoaşte dezvoltarea:

$$\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t,$$

deci:

$$3 \sin t - \sin 3t = 4 \sin^3 t,$$

expresiunea (1) devine:

$$E = 8\,a_1 \sin^3 t \cos t + 8\,a_0 \sin^3 t \cos 3t =$$

$$8 \sin^3 t\,(a_0 \cos 3t + a_1 \cos t),$$

şi astfel identitatea din enunţ este stabilită.

Verificări. 1°. Pentru $t = \frac{\pi}{4}$, identitatea dată devine:

$$(2\,a_1 - 3\,a_0) + a_0 = 8\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \cdot \left(-\frac{a_0}{\sqrt{2}} + \frac{a_1}{\sqrt{2}}\right),$$

sau:

$$2\,(a_1 - a_0) = \frac{8}{4}\,(a_1 - a_0)$$

ceeace înseamnă că identitatea dată este verificată.

2°. Pentru $a_0 = 0$, identitatea dată devine:

(2) $$2\,a_1 \sin 2t - a_1 \sin 4t = 8\,a_1 \sin^3 t \cos t.$$

Pentru a o verifica observăm că primul membru E_1, se poate scri succesiv:

$$E_1 = 2\,a_1 \sin 2t\,(1 - \cos 2t) =$$

$$4\,a_1 \sin t \cdot \cos t \cdot 2 \sin^2 t = 8\,a_1 \sin^3 t \cos t,$$

ceeace dovedeşte că relaţia (2) este verificată.

Soluţii date de d-nii: *Chiriac C-tin* (lic. Milit, Iaşi), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M. Marin* (bacalaureat, Craiova), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie), *Lupescu Gh. Corneliu* (lic Roman), *Mazilu P.* (bacalaureat, Iaşi) *Mereuţă-Neamţ Emilian*, *Negrea A. Leonte-Mircea* (licenţiat în Matematici), *Păun V. Nicolae* (Şc. Polit, Timişoara), *Popa B. Ioan* (Şc. Polit, Timişoara), *Ursoiu George* (lic. Milit, Iaşi), *Sâmbotin Gh.* (Sub-Lt), *Săndulescu Ioan* (Şc. Polit., Timişoara) şi *Vasiliu-Leoben Gh.* (Inginer).

PROBLEME PROPUSE

1240. — Trouver les carrés parfaits de chacune des formes *a a b c c b et a a b c b c.*

V. THÉBAULT

1241. — Să se găsească un cub perfect de şapte cifre, ştiind că dacă scădem din el inversul lui căpătăm restul zero. Se ştie încă că cifra a patra a numărului cerut este egală cu prima cifră mărită cu a treia şi numărul format de cifra a doua urmată de a treia este un patrat perfect.

TRAIAN M PREDOESCU

1242. — Fie D şi E picioarele bisectoarei interioare şi a bisectoarei exterioare ale unghiului A a triunghiului A B C înscris în cercul O. Perpendicularele din D şi E pe diametru A O întâlnesc bisectoarele unghiului A în D' şi E'. Să se demonstreze că figura D D' E' E este un romb.

COL. GH. BUICLIU

1243. — Fie A_1, B_1, C_1 picioarele înălţimilor unui triunghiu A B C, A', B', C' punctele unde aceste înălţimi taie cercul circumscris triunghiului. Cercurile descrise din A_1, B_1, C_1 ca centre şi cu razele egale respectiv cu $A_1 A'$, $B_1 B'$, $C_1 C'$ trec prin ortocentrul triunghiului A B C şi se intersectează a doua oară două câte două în α, β, γ, astfel că triunghiurile A B C şi $\alpha\beta\gamma$ sunt omotetice.

JUSTIN N VALCEANU

1244. — Să se rezolve ecuaţia:

$$x^4 - 4x^3 + (2a + 3)x^2 - 2(2a - 1)x +$$

$$a(a - 1) - 2 = 0.$$

Să se determine apoi a, astfel ca ecuaţia să aibă două rădăcini egale.

IOAN SANDULESCU

1245. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x - yz - xyz = 13 \\ y - zx - xyz = 17 \\ z - xy - xyz = 19 \end{cases}$$

ADRIAN POPESCU

1246. — Să se stabilească identitatea:

$$\sum_{k=0}^{3} \cos(3 + 6k)\,t = \frac{\sin 24t}{2 \sin t\,(1 + 2 \cos 2t)}$$

V. ALACI

1247. — A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu A B C şi h'_a, h'_b, h'_c porţiunile de înălţimi cuprinse între ortocentru şi vârfurile triunghiului, se cere să se stabilească relaţia:

$$\sqrt{(h'_a + h'_b + h'_c)\,(\cos A + \cos B + \cos C)} =$$

$$\sqrt{h'_a \cos A} + \sqrt{h'_b \cos B} + \sqrt{h'_c \cos C}.$$

MARIN P. TICA-GAŢ

ȘCOALA POLITECHNICĂ TIMIȘOARA
CANDIDAȚII REUȘIȚI LA EXAMENUL DE ADMITERE ÎN ANUL PREPARATOR
(ANUL ȘCOLAR 1933—1934)

1. *Chiu I. Trifu* (lic. C. Diaconovici Loga, Timișoara).
2. *Tripa Gh. Mihai* (lic. Emanoil Gojdu, Oradea).
3. *Munteanu D. Gheorghe* (lic. Nicolae Bălcescu, Brăila).
4. *Vancai I. Ion* (Șc. Conductori Technici, Cluj).
5. *Berenţan Gh. Erast* (lic. Dimitrie Cantemir, Cozmeni).
6. *Carpov N. Nicolae* (lic. Alecu Rusu, Chișinău).
7. *Păcurar V. Cornel-Liviu* (lic. Avram Iancu, Brad).
8. *Dumitriu St. Constantin* (lic. Nicolae Bălcescu, Brăila).
9. *Brătianu R. Radu* (lic. C. Diaconovici Loga, Timișoara).
10. *Marinescu I. Nicolae* (lic. Vasile Alexandri, Galați).
11. *Melinie P. Alexandru* (lic. Mareie Voevod Mihai, Cetatea-Albă).
12. *Zelinschi Z. Eughenie* (lic. Alex. Donici, Chișinău).
13. *Buka F. Francisc* (lic. Colegiul reformat, Tg.-Mureș).
14. *Echizli N. Eughen* (lic. Dimitrie Cantemir, Comrat).
15. *Nițuleac C. Mihail* (lic. ort. de băeți, Cernăuți).
16. *Cosman D. Alexandru* (lic. Tim. Cipariu, Dumbrăveni).
17. *Echizli N. Anatolie* (lic. Dimitrie Cantemir, Comrat).
18. *Băiatu E. Manea Viorel* (lic. Traian, Turnu-Severin).
19. *Pelwecki A. Stanislau* (lic. Dim. Cantemir, Cozmenl).
20. *Ionca I. Ștefan* (lic. Principele Carol, Tulcea).
21. *Prepeliță I. Vladimir* (lic. Technic Agricol, Soroca).
22. *Salagor Iacob* (lic. Stefan cel Mare, Tighina).
23. *Nisipeanu P. Victor* (lic. Nicolae Bălcescu, Brăila).
24. *Totoescu A. Orestes* (lic. ort. de băeți, Cernăuți).
25. *Zechi Z. Gheorghe* (lic. Nicolae Bălcescu, Brăila).
26. *Cibian T. Florin* (lic. Moise Nicoară, Arad).
27. *Paladi P. Alexandru* (lic. Mihail Eminescu, Chișinău).
28. *Bogacev Gh. Anatolie* (lic. B. P. Hașdeu, Chișinău).
29. *Faur A. Ioan* (Șc. Conductori Technici, Cluj).
30. *Manolescu N. Benyamin* (lic Alex, Hașdeu, Buzău).
31. *Maevschii I. Ioan* (lic. Alecu Rusu, Chișinău).
32. *Ola A. Alexandru* (lic. Andrei Mureșan, Dej)
33. *Bulat A. Alexandru* (lic. B. P. Hașdeu, Chișinău).
34. *Dobrota V. Constantin* (lic. Regele Carol II, Bolgrad).
35. *Ilea V. Octavian* (lic. Gheorghe Lazăr, Sibiu).
36. *Joltăilă St. Ștefan* (lic. Alecu Rusu Chișinău).
37. *Koulpy I. Iosif* (lic. Vasile Alexandri, Galați).
38. *Nicolicev N. Nicolae* (lic Stefan cel Mare, Tighina).
39. *Cimponeriu D. D-tru Gh.* (lic. C Bredicianu, Lugoj).
40. *Popescu D. D-tru Gheorghe* (lic. Sft. Dumitru, Ismail).
41. *Simionescu N. Mihail* (lic. N. Bălcescu, Brăila).
42. *Bărbulescu C. Marin* (lic. Carol I, Craiova).
43. *Boescu D. Aurel* (lic. Traian, Turnu-Severin).
44. *Nomicos Gh. Vasile* (lic. Unirea, Focșani).
45. *Pretor D. Mircea* (lic. de băeți, Petroșani).
46. *Pitic R. Romulus* (lic. Gral Dragalina, Oravița).
47. *Popescu C. Alexandru* (lic. Sfții Petru și Pavel, Ploești).
48. *Pal St. Iosif* (lic. Unitarian, Cluj).
49. *Rembievschi A. Mihail* (lic Alex. Donici, Chișinău).
50. *Afteni V. Ioan* (lic. Stefan cel Mare, Tighina).
51. *Bodeanu Radu* (lic. gr. cat. băeți, Blaj).
52. *Constantin Gh. Gheorghe* (lic. Andrei Șaguna, Brașov).
53. *Rînea I. Ervin* (lic. S. Bărnuțiu, Simleul Silvaniei).
54. *Vodă I. Aurel* (lic. Papiu Ilarion, Tg-Mureș).
55. *Afurcheev V. Dumitru* (lic. A. D. Xenopol, Soroca).
56. *Chircu C. Ioan* (lic. ort. băeți, Cernăuți).
57. *Miertoiu N. Ioan* (lic. Carol I, Craiova).
58. *Rein R Rudolf* (lic. German de Stat, Timișoara).
59. *Ivanov Gh. Vasile* (lic. M. Voevod Mihai, Cetatea-Albă).
60. *Blasko I. Iasif Paul* (lic. Gheorghe Lazăr Sibiu).
61. *Iliescu C. Marin* (lic. Gheorghe Sincai, București).
62. *Neubauer A. Gheorghe* (lic Nic. Bălcescu, Brăila).
63. *Vlasin Gh. Vasile* (lic. Gh. Coșbuc, Năsăud).
64. *Marinescu I. Gheorghe* (lic. Gh. Barițiu, Cluj).
65. *Goloborodco P. Vasile* (lic. Sft. Dumitru, Ismail).
66. *Bulmău C. Sandu* (lic. Dimitrie A. Sturza, Tecuci).
67. *Granevschi I. Vadim* (lic. Gen. Berthelot, Chișinău).
68. *Grigoriu A. Aristide* (lic Nic. Bălcescu, Brăila).
69. *Dupcza F. Nicolae* (lic. Piarist, Timișoara)
70. *Sándor A. Bela* (lic. ref. Wesselenyi, Zalău).
71. *Holoștencu I. Leonid* (lic. Sft. Dumitru, Ismail).
72. *Nicolaev P. Valerian* (lic. A. D. Xenopol, Soroca).
73. *Sisak I. Ernest* (lic. Piarist, Timișoara).
74. *Boev P. Alexandru* (lic. Regele Carol II, Bolgrad).
75. *Sibian V. Gheorghe* (Seminarul Ped. Univ., Cluj).
76. *Mitrache M. Ioan* (lic. C. Diaconovici Loga, Timișoara).
77. *Cosma Gh. Nicolae* (lic. C. Diaconovici Loga, Timișoara).
78. *Cristescu Gh. Petrică* (lic. Diaconovici Loga, Timișoara).
79. *Gombos Il. Ioan* (lic. Moise Nicoară, Arad).
80. *Ioan S. Constantin* (lic. B. P. Hașdeu, Buzău).
81. *Stochiță I. Cornel* (lic. Diaconovici Loga, Timișoara).
82. *Bogdan P. Emil* (lic. Vasile Lucaci, Careii Mari).
83. *Mușat A. Sorin Septimiu* (Seminarul Ped. Univ. Cluj).
84. *Rișcuța P. Petru* (lic. Avram Iancu, Brad).
85. *Vasilescu A. Nicolae* (lic. Alex. Hașdeu, Buzău).

---

† EMIL D. SAEGIU. Ne-a părăsit un credincios membru în comitetul de redacție al revistei noastre, care după o lungă suferință a decedat la 29 Octomvrie a. c. Încă din primii ani de apariție ai revistei înscris printre susținătorii ei, inginerul *Emil Saegiu,* a fost colaborator, a dat și ajutorul său material. Îi păstrăm o colegială amintire.

ANUL XIII. 15 DECEMBRIE 1933 NO. 10.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 SĂRBĂTORIREA D-LOR PROFESORI D. POMPEIU ȘI G. ȚIȚEICA.
2. P. SERGESCU HISTOIRE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES EN ROUMANIE.
3. NOTE MATEMATICE: 21
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1147, 1162, 1169, 1172.
6. PROBLEME PROPUSE: 1248-1255.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Artegrafice „Tipografia Românească"

„Orice profesor de matematici, din orice colț al țării și de la orice școală, trebuie să fie apostol al specialității sale. Din felul cald și luminos cum își face lecțiile, din drumul drept și demn pe care îl urmează în viață, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă și sigură, curată ca cristalul, are o înaltă și admirabilă valoare educativă pentru viață.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieței noastre. Aceasta să fie contribuția specialității noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ȚIȚEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci** –profesor Școala Politechnică, Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adre sate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Școala Politechnică din Timișoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timișoara" este pentru anul XIII, de 200 (două sute) lei.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XII inclusiv, broșate, 120 lei fiecare

---

ANUL XIII — No. 10. TIMISOARA, 15 DECEMBRIE 1933

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie.

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Şcoala Politechnică din Timişoara.

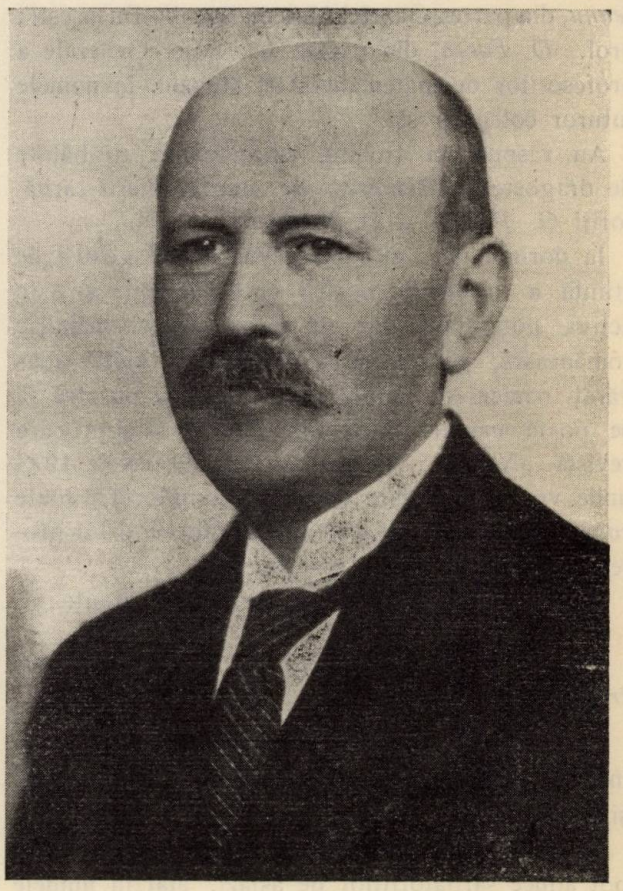
SĂRBĂTORIREA D-LOR PROFESORI D. POMPEIU ŞI G. ŢIŢEICA

Societatea Română de Matematici de la Universitatea din Bucureşti a luat iniţiativa a sărbători pe cei doi mari matematicieni români d-nii

PROF. D. POMPEIU
(NĂSCUT 4 OCTOMVRIE 1873)

profesori *D. Pompeiu* şi *G. Ţiţeica,* cu prilejul împlinirii vârstei de 60 de ani.

Solemnitatea a avut loc Duminică, 26 Noemvrie 1933, în amfiteatrul „*Spiru Haret*" de la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti, sub presidenţia d-lui *Victor Vâlcovici* şi a luat caracterul unei mari manifestaţiuni naţionale pentru cei sărbătoriţi, din partea a tot ceeace ştiinţa românească are mai



PROF. G. ŢIŢEICA
(NĂSCUT 17 OCTOMVRIE 1873)

de seamă. Au luat pe rând cuvântul d-nii *V. Vâlcovici,* preşedintele Societăţii de Ştiinţe din Bucureşti; prof. *Dr. C. Angelescu,* ministrul in-

strucţiunii; prof. *L. Mrazek*, preşedintele Academiei Române; prof. *Dr. Gheorghiu*, rectorul Universităţii din Bucureşti; *Ing. Vasilescu Karpen*, rectorul Şcoalei Politechnice din Bucureşti; prof. *Dragomir Hurmuzescu*, decanul Facultăţii de Ştiinţe din Bucureşti; prof. *David Emmanuel;* prof. *I. Popovici*, în numele Facultăţii de Ştiinţe din Iaşi; prof. *Petre Sergescu*, din partea Facultăţii de Ştiinţe din Cluj; prof. *S. Stoilov*, în numele Facultăţii de Ştiinţe din Cernăuţi; prof. *V. Alaci*, din partea Şcoalei Politechnice din Timişoara; prof. *Octav Onicescu*, în numele Societăţii Române de Ştiinţe; prof. *Bianu*, în numele Societăţii de Fizică din Bucureşti; prof. *Butescu*, în numele Societăţii de Chimie din Bucureşti; prof. Ing. *I. Ionescu*, din partea Societăţii Politechnice; Ing. *Cezar Orăseanu*, din partea Gazetei Matematice din Bucureşti; prof. *D. Focşa*, din partea Asociaţiei Generale a profesorilor de matematici; un student, în numele tuturor colegilor săi.

Au răspuns în cuvinte emoţionante străbătute de dragostea neţărmurită de stiinţă, marii sărbătoriţi *G. Ţiţeica* şi *D. Pompeiu*.

In dorinţa de a stimula râvna şi dragostea de ştiinţă a harnicilor noştrii corespondenţi şi a le activa potenţialul lor de entuziasm şi mândrie românească, pentru ca şi dintre ei să ridice adevăraţi oameni de ştiinţă cu care *Ţara* noastră să se poată mândri, îi invităm stăruitor să-şi procure revista „*Natura*“ No. 10 din 15 Decemvrie 1933 unde vor găsi o dare de seamă complectă şi toate cuvântările ţinute cu prilejul sărbătoririi d-lor profesori *D. Pompeiu* şi *G. Ţiţeica*.

Publicăm totuşi două din cuvântările ţinute:

Cuvântarea D-lui Prof. Dr. C. Angelescu, ministrul instrucţiunii.

„O vie recunoştinţă şi un nobil sentiment ne-au întrunit astăzi aci, la această sărbătorire a muncii şi a meritului.

Ca ministru al culturii naţionale, sunt fericit să pot aduce sărbătoriţilor de astăzi, atât în numele meu personal, cât şi în numele autorităţii, pe care am cinstea să o reprezint, omagiul meu de profundă admiratiune, pentru opera de seamă cu care *Ţiţeica* şi *Pompeiu* au îmbogăţit comoara culturii româneşti.

Ca profesori, timp de peste un sfert de veac, d-voastră, domnilor aţi ilustrat Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti şi aţi fost în adevăratul sens al cuvântului, profesori, nu numai prin talentul d-voastră de expunere şi prin adâncimea gândirii, dar şi prin dragostea ce v'a legat de profesiunea şi de elevii d-voastră, pe cari i-aţi sfătuit şi i-aţi îndrumat.

Prin impulsiunea ştiinţifică dată de d-voastră, prin produsul activităţii ce aţi desfăşurat, aţi creiat la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti o atmosferă de înalte preocupări ştiinţifice, cari indică locul de frunte pe care-l ocupă această instituţie astăzi, în mişcarea ştiinţifică nu numai a ţării, dar şi a străinătăţii.

In pleiada celor care ilustrează ştiinţa matematicii româneşti, alături de *Spiru Haret*, de *David Emmanuel*, *Gogu*, de *Pangrati*, de *Bungeţeanu*, de *Coculescu*, de *Davidoglu* şi de alţii, dvoastră d-lor ocupaţi un loc de seamă.

Activitatea d-voastră ştiinţifică a radiat şi radiază lumină de câteva decenii; din această lumină s'au aprins alte lumini şi elevii d-voastră astăzi, oameni în plină maturitate a gândirii şi a ştiinţei, sunt elemente de elită în viaţa culturală a ţării şi a neamului.

Dar, nu aţi fost numai oameni de ştiinţă, ci întrând în viaţa şcolară şi în cea socială, cu spiritul d-voastră calm, cu metoda obiectivă care vă caracterizează, cu moderaţia în gândire şi în expunere, aţi adus mari şi însemnate servicii ţării şi învăţământului nostru.

Domnule *Ţiţeica*, graţie marei d-voastră experienţe, graţie impecabilei d-voastră metode ştiinţifice şi graţie adâncimei pătrunderii problemelor şcolare, aţi fost unul din colaboratorii cei mai de seamă aproape ai tuturor miniştrilor cari s'au perindat la ministerul culturii naţionale şi în special al meu şi deaceea ţin, în aceste momente solemne, să vă exprim recunoştinţa şi profunda mea gratitudine.

Iar d-voastră, d-le *Pompeiu*, prin însuşirile sufleteşti cu care v'a dotat natura, prin calmul manifestaţiunilor d voastră, prin spiritul d-voastră ştiinţific şi prin lunga experienţă căpătată în viaţa socială, căci a-ţi cunoscut sufletul poporului nostru, profesând din şcoala primară, până în univer-

sitate, ați adus mari servicii nu numai învățământului, dar ați arătat cât de mari servicii poate aduce țării, omul de știință, când este chemat să contribue la conducerea ei.

Puteți deci să vă considerați fericiți, d-lor profesori, căci ajunși la etatea de 60 de ani, când priviți înapoi, puteți constata că ați clădit o operă temeinică, o operă neperitoare, printr'o muncă constructivă.

Guvernul țării prin glasul meu aduce omagiul său de adâncă recunoștință acestor 2 mari dascăli, cari au dat atâta strălucire culturii românești.

Iar Majestatea Sa Regele, apreciind marile lor merite a binevoit a conferi d-lui *Pompeiu*, insignele ordinului *„Pentru Merit"*, iar d-lui *Țițeica „Marea cruce a ordinului coroana României"*.

Cuvântarea d-lui Dr. Gheorghiu, rectorul Universității din București:

Astăzi ne-am adunat ca să sărbătorim pe d-nii *Țițeica* și *Pompeiu*, doi pionieri ai științei românești, ajunși prin meritele lor personale, grație muncei și calităților intelectuale manifestate încă din tinerețe. Prin munca și inteligența lor, au făcut ca știința românească să treacă nu numai hotarele, dar și oceanele.

Aceastǎ sărbătorire, răsplată morală, este bine meritată; dar trebue să felicit — și o fac din toată inima — și pe inițiatori, căci ei ne arată că sufletul lor este plin de nobleță.

Aș dori ca acest fel de gesturi sufletești să se repete cât mai des și ori de câte ori ocaziunea se va prezenta, pentru ca să arătăm urmașilor noștri, valoarea științifică și morală a înaintașilor lor, iar unora din vecinii noștri să le arătăm valoarea științei românești.

Dar am un regret: acela de a mă acuza că în Universitatea noastră, astăzi, nu se găsește bustul lu *Maiorescu*, al lui *Haret*, al lui *Toma Ionescu* și al altora. Este adevărat că am o scuză, criza financiară de care suferă Universitatea.

Domnilor sărbătoriți: vă urez viață lungă pentru binele acestei Universități și pentru gloria neamului nostru.

HISTOIRE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES EN ROUMANIE[1]

Par

P. SERGESCU

Placés au carrefour des routes entre l'Orient et l'Occident de l'Europe, entre la mer Baltique et la mer Noire, les Roumains ont dû supporter, durant des siècles, des invasions et des guerres; c'est pourquoi le développement des sciences en Roumanie, qui eût demandé la continuité et le calme, a été très lent jusqu'au milieu du XIX^{e} siècle. D'autre part, la plupart des documents sur les efforts scientifiques roumains ont été détruits pendant les luttes, ce qui rend particulièrement difficile l'histoire des sciences chez les Roumains avant le XIX^{e} siècle. Ajoutons que l'étude de l'histoire des sciences mathématiques et physiques en Roumanie est très récente: il y a à peine une trentaine d'années qu'on a commencé ces études, et ce sont surtout des questions de détail qu'on a envisagées. Mais, jusqu'à présent, il n'y a pas encore un seul essai de synthèse des résultats obtenus. En ce qui concerne le matériel publié, on doit citer les études de M. *I. Ionescu* qui sont vraiment précieuses et qui peuvent servir à une première ébauche de l'histoire des mathématiques en Roumanie. Nous attendons que M. *Ionescu* nous la donne. Les ouvres de *N. Iorga* contiennent de nombreuses et précieuses informations sur l'état des sciences exactes chez les Roumains.

C'est à peine à partir du XVII^{e} siècle qu'on a des informations un peu plus précises: quelques oeuvres d'auteurs roumains, quelques descriptions de voyages. Mais on ne peut parler d'une préoccupation constante des sciences dans l'enseignement et dans la vie publique roumaine que depuis la fin du XVIII^{e} siècle. C'est pourquoi je diviserai ce rapport en quatre parties:

---

[1]) Studiul prezent a fost prezentat de d-l prof. *P. Sergescu* ca: *Raport la Congresul Internațional de Istorie din Varșovia*, August 1933 și ca atare, a apărut și în *„Bulletin du Comité international des Sciences historiques*, No. 19, Mai 1933.

D-l profesor *P. Sergescu* tipărește în prezent la *Vălenii de Munte* o broșură românească de circa 60 pagini, în care tratează mai dezvoltat acelaș subiect.

1° Informations relatives aux XVII^e et XVIII^e siècles ;

2° Introduction de l'enseignement scientifique dans les Principautés Danubiennes. (environ 1760—1850) ;

3° Débuts de la création scientifique, organisation des universités (1850—1900) ;

4° Bibliographie.

Le développement de l'activité scientifique en Roumanie accuse un grand essor depuis la fin du siècle dernier et l'on peut parler aujourd'hui d'une École roumaine de Recherches dans certains domaines. Mais son étude dépasserait les cadres de ce rapport.

I.

INFORMATIONS RELATIVES AUX XVII^e ET XVIII^e SIÈCLES.

Il est probable que les Roumains ont eu un contact direct avec la culture latine déjà depuis le XIII^e siècle, dans des écoles près des évêchés de Milcov, Baia, Bacau, Arges. L'enseignement roumain, lié à la langue slavone, se donnait dans certains monastères. (Tismana au XIV^e siècle, etc.) L'enseignement latin disparaît après la suppression des évêchés catholiques. Mais le XVI^e siècle marque un renouveau intéressant. Le Prince *Joan Despot Heraclid*, ancien étudiant en médecine à Montpellier, crée en 1560 une *Académie* à Cotnari. Il pensait à arriver par la culture latine à réunir tous les Roumains en un seul pays. L'académie eut comme directeur le Silésien *Jaques Sommer* et parmi les professeurs nommés il y eut le célèbre mathématicien *Rheticus*. Après la chute de *Despot*, le prince *Petru Schiopul* (1574—79 et 1582—91) confia l'école de Cotnari aux Jésuites de Lublin.

Au XVII^e siècle, le prince moldave *Vasile Lupu* (1634—53) fonda à Iaşi, vers 1640, une académie, analogue à celle du célèbre Métropolite de Kiew *P. Movilă*. Le directeur de l'Académie fut *Sofronie Poczacky* et parmi les professeurs on trouve *Teofil Coridaleu*, auteur de manuels manuscrits, d'après lesquels on enseignait encore dans les Principautés à la fin du XVIII^e siècle *(Étude sur le Ciel, Physique, Traité de l'âme)*. L'académie avait un musée d'instruments de mathématiques et d'astronomie. C'est dans cette école que *Nicolae Milescu*, le voyageur en Chine bien connu, a commencé ses études.

Nicolae Milescu (1625—1708) fut le Roumain le plus savant du XVII^e siècle. Obligé de quitter la Moldavie (à la suite d'un complot contre le prince régnant) il vécut à Moscou. Il y écrivit en 1672, en slavon, un traité *Aritmologion*, véritable encyclopédie mathématique, religieuse et philosophique. (On y trouve aussi quelques carrés magiques). Mais la grande célébrité de *Milescu* est due à ses explorations dans l'Asie Orientale ; il nous reste de lui plus de 30 travaux géographiques, dont les plus importants sont *la Description de la Chine* et son *Journal de voyage*.

Vers le milieu du XVII^e siècle, les Principautés danubiennes subirent une forte influence italienne, par l'action de Venise et des Grecs, adeptes d'une Union des Églises. De nombreux boyards envoient leurs fils faire leurs études en Italie, et surtout à Venise. Le plus important parmi eux fut le Valaque *Constantin Cantacuzino* (1650—1716). Parti de la Principauté Valaque en 1665, il fit des études à Constantinople, ensuite, à partir de 1667, à Padoue. En 1668, il y étudia *les Éléments d'Euclide, le Traité de la sphère* (Armilaris), *la Physique* et le *Traité de l'âme*. Il publia à Padoue une charte de sa patrie (en grec). Sous son influence, son frère, le prince *Serban Cantacuzino* fonda à Bucarest, en 1678, une *Académie* d'après le modèle italien, école dirigée en 1689—1702 par *Sevastos Kymenites*. Le grand prince *Const. Brâncoveanu* (1688—1714) s'occupa activement de cette école. Il envoya de nombreux boursiers à Venise, comme le médecin *Chrysogon Hypomenus* († 1745), *Anton Stratigos*, *Palade Damian*. Le plus important de ces boursiers est *Hrisant Notara*, futur patriarche de Jérusalem et un des plus grands mathématiciens de l'Orient. *Ancien* élève de *Kymenites* à Bucarest, il fut envoyé à Padoue et à Paris pour étudier l'astronomie ; il eut des relations avec le grand *Cassini*. En 1716 il publia à Paris une *Géographie mathématique*, où se trouvent les premières déterminations de coordonnées concernant la Principauté valaque (Târgovişte et Bucarest). Devenu patriarche, il continua à vivre longtemps dans les Principautés et eut une forte influence sur l'orientation occidentale de l'enseignement roumain

au début du XVIII[e] siècle. En 1713 il composa le programme des études en grec de l'Académie de Bucarest : 1[re] année : logique, réthorique, physique, astronomie, psychologie ; 2[e] année : études grecques, *Isocrate*, *Euripide*, *Eschyle*, *Pindare*, la syntaxe ; 3[e] année : la grammaire, *Pythagore*, *Caton*, *Ésope*, *l'Évangile*. Il composa en 1716 un manuscrit grec d'introduction à la geographie et à l'astronomie. Citons encore, comme savants et professeurs à la cour de *Brâncoveanu*, l'astrologue et auteur de calendriers : *Romanul*, le médecin *Ion Comnen*, professeur de sciences physiques, mort en 1719 comme évêque de Dristel (Durostor).

En Moldavie, l'Académie de *Vasile Lupu* étant disparue, le prince *Duca Vodă* (1692—95 et 1700—3) organisa une école éphémère d'après le modèle de *Cantacuzino et Brâncoveanu*. C'est à ce moment qu'apparaît en Moldavie le plus grand savant roumain du XVIII[e] siècle, *D. Cantemir* (1673—1723), prince régnant en 1710—11, membre de l'Académie de Berlin à partir de 1714. En nous bornant à l'histoire des mathématiques, nous devons relever des passages mathématiques dans son étude sur *le Système de la musique musulmane*. *Cantemir* prit un très grand soin de l'instruction mathématique de son fils *Antioch*, élève d'un *Bernoulli*, et auquel il semble qu'on doit attribuer un manuscrit d'algèbre écrit à Paris sous l'influence de *Maupertuis*.

Les Académies de Bucarest et Iaşi furent complètement réorganisées durant les règnes des princes phanariotes. Conseillé par le patriarche *Hrisant Notara*, le prince *Nicolae Mavrocordat* (en Moldavie, 1709—10 et 1711—16, en Valachie, 1716 et 1719—30) réorganisa en 1714 et 1716 les Académies de Iaşi et Bucarest. C'étaient des écoles de philosophie générale ; l'enseigement se faisait en grec. Un catalogue de 1727, à Iaşi, contient les Éléments *d'Euclide*, différents livres d'aritmétique, astronomie et physique. On enseignait vers 1750, la Physique de *Coridaleu*, la Cosmographie de *Coridaleu*, la Rhétorique de *Coridaleu*.

Vers cette époque, en 1761, le célèbre astronome *Boscovich* visita la Moldavie, de Galaţi, par Iaşi, Cernăuţi à Zalesciki en Pologne. Il détermina les premières coordonnées géographiques en Moldavie (Galaţi et Iaşi). Le prince *Grigore Calimach* le reçut d'une manière parfaite et le pria de rester un an en Moldavie pour y enseigner l'Astronomie. Le Palais de Iaşi avait un cabinet des sciences, avec des globes terrestres et célestes, avec des instruments inventés à Londres à peine depuis quelques mois pour l'étude des éclipses et des taches du soleil par *Dollond*. A Galaţi, il y avait de grands chantiers pour la construction des navires pour la mer Noire, pour les Turcs. *Boscovich* mesura les dimensions d'un pareil navire, et il en fut effrayé : 70 pieds de long et 17 de large ; des canots d'un seul tronc d'arbre de 30 pieds de long et 4 de large.

Le prince *Grigore Alexandru Ghica* (en Moldavie en 1764—67 et 1774—77, en Valachie en 1768—69) essaya de donner un nouvel éclat aux Académies, malgré leur fermeture durant la guerre russo-turque. On a une liste des manuels des sciences enseignées dans les Principautés à cette époque. A part *Coridaleu*, il y avait les manuscrits de *Nichifor Teotokis* : Éléments d'arithmétique et de géographie (1758), Éléments euclidiens de la géométrie (contenant aussi la trigonométrie, 1764), *I. Forneiu* tra uisit en grec (1798) une géométrie (avec la trigonométrie) de *Vlod* ; *N. Kiriac Cercel* donna en 1800 la traduction de la trigonométrie anglaise de *Scot*.

Mais on sent déjà le nouveau courant, celui de *l'école nationale*, qui permit à tous les Roumains de connaître la science et de la cultiver. L'évêque *Amfilochie de Hotin*, ancien élève à Rome, composa en 1778 une *Géographie moldave*, d'après *Bouffier*. Il fit imprimer à Iaşi, en 1795, une *Arithmétique en roumain*. C'est encore en 1795 que *Matei Milo* composa un manuscrit roumain d'arithmétique, avec des calculs adaptés aux unités moldaves, très compliquées. En Transylvanie, un ancien élève de Rome, *G. Sincai*, publie en 1785 une *Arithmétique* (roumano-allemande).

II.

INTRODUCTION DE L'ENSEIGNEMENT SCIENTIFIQUE DANS LES PRINCIPAUTÉS DANUBIENNES (1760-1850)

L'introduction des sciences comme base de l'enseignement dans les deux Académies princières, au lieu de la philologie qui était prédominante aupa-

ravant, est due au prince *Alexandru Ipsilanti* (en Valachie 1774—82 et 1796—97, en Moldavie 1886—88). Dans son acte de fondation de l'Académie de Bucarest en 1776, on trouve dèjà des idées nouvelles: il y aura deux professeurs de mathématiques (arithmétique, géométrie et astronomie), un professeur de physique. La physique devait être enseignée en grec, mais les mathématiques pouvaient l'être *en français*, en italien ou en latin. On trouve comme directeur de l'école le savant moine roumain *Iosif Moesiodax* (de Cernavoda) auteur d'une Théorie de la géographie publiée à Vienne en 1781. Parmi les professeurs des sciences: *Manase Eliad* († 1785), auteur d'un discours en l'honneur *d'Ipsilante*, en latin, imprimé en 1781 à Leipzig, envoyé en 1785 en Allemagne pour acheter des instruments de mathématiques et de physique; un mathématicien napolitain *Vito Caravelli*, qui dédia à *Ipsilante* une Trigonométrie sphérique, qu'on enseignait à Bucarest. Entre 1780 et 1790 on trouve comme directeur *Neofit Cavsocalivite* († 1790) auquel succède le mathématicien connu dans les Principautés *Grigore Constanda* qui semble être le premier docteur ès sciences mathématiques (Halle, 1790) qui ait enseigné dans les Principautés. En 1791, *Constanda* collabore avec un autre professeur de Bucarest *Daniel Philippide* (1770—1832) pour publier en grec, à Vienne, une Géographie moderne, dédiée à *Potemkin*, gouverneur des Principautés. *Philippide* a traduit ensuite l'Astronomie de *Lalande*, qu'il a dédiée au prince *Al. Moruzi*, en l'accompagnant de différentes tables astronomiques et d'explications sur les calandriers julien et grégorien. Il écrivit encore (en 1816) une Géographie des Principautés, très importante, une Histoire des Roumains, une traduction de la Logique de *Condillac*, de la Philosophie naturelle de *Brisson*, de *Florus*, enfin une encyclopédie en 12 volumes qui n'a pas été imprimée. Le directeur entre 1792—1805 fut *Lambru Fotiade* et, après lui, le professeur de mathématiques *C. Vardalah*. Un élève de *Fotiade*, *Mihai Cristari*, imprime à Padoue en 1804, en grec, mais avec des subventions roumaines, une Arithmétique et Algèbre d'après *Metzburg*. Une nouvelle traduction, du latin, de *Metzburg* fut imprimée en 1818 par *Atanase Psalitis*. Citons encore, parmi les savants qui vivaient à cette époque à Bucarest, *Atanase Hristodul*, d'abord juge au premier tribunal de Iaşi et ensuite au tribunal pour les étrangers à Bucarest († 1847). Il écrivit un traité de physique fort apprécié: *Sur le vide.*

L'Académie de Iaşi a été organisée dans le même sens que celle de Bucarest une trentaine d'années plus tard. En 1792, le métropolite *Iacob Stamati* adresse au prince *Alexandru Moruzi* (en Moldavie en 1792—93 et 1802—6, en Valachie 1793—96 et 1799—1801) un rapport pour l'organisation d'une Académie (École) des Sciences, dont le but principal était l'enseignement des mathématiques et de l'art de l'ingénieur. Les cours de mathématiques pouvaient être enseignés en français ou en grec *jusqu'au moment où l'on trouverait un professeur pouvant enseigner en Roumain.*

Mais, même en dehors des écoles publiques, les princes et les boyards faisaient venir pour leurs fils des professeurs étrangers et surtout français, dont le nombre s'accroît vite par les émigrés de la Révolution française. C'est ainsi que l'on rencontre comme professeurs de sciences exactes, en 1796, *Jean-Baptiste Trécourt*, ancien professeur de mathématiques à Constantinople, *Martinot* en 1798, *Coulin*, *Lédoulx* de *Sainte-Croix*, *Mériage*, etc., le Polonais *Wengierski*, l'Allemand *Wili*. On a gardé les manuscrits de quelques cours de ces professeurs français; entre 1798 et 1806 ils sont en français, pour devenir franco-roumains ensuite, et même complètement roumains après 1812. Ces manuscrits ne représentent pas des cours originaux, mais c'est grâce à cet enseignement que les Roumains se sont initiés à la science occidentale. Les plus intéressants de ces manuscrits se trouvent dans la bibliothèque du Séminaire de Iaşi. Une *Arithmétique*, de 1800, traduite d'après *Bézout*, sans nom d'auteur ou de traducteur, débute par des carrés magiques. Un *Cahier d'arithmétique* (13, III, 1804) développe les problèmes d'un cours français, que M. *I. Ionescu* suppose être celui de *L. Lemoine*. Les exemples contiennent les unités du système métrique français, mais aussi des unités moldaves. Des *Remarques sur la géométrie* (15, II, 1805) contiennent un traité de la sphère par *Rivard* et de nombreux problèmes de géométrie par *Rivard*. Une

Algèbre (1, I, 1807) débute par des problèmes de *Bézout* et contient aussi la traduction roumaine du texte français. Plus tard, le texte devient roumain, mais il représente des traductions du français, comme par exemple les trois manuscrits de 1828: *Cours complet de mathématique pure.* Le premier cahier est une traduction de l'Arithmétique de *Francoeur*; le second cahier, *Alegere* (Choix), élementară, au lieu de Algebra elementară, est probablement composé d'ap ès des auteurs anglais; le troisième cahier contient une Géométrie d'après *Francoeur.*

C'est grâce à des cours pareils que les Roumains sont mûrs, vers 1820 pour commencer l'école nationale scientifique.

En Valachie, le prince *Caragea* essaie encore de fonder une Académie grecque laïque, avec des professeurs comme *Veniamin Lesbios,* le mathématicien *Kanelas.* En Moldavie, le prince *Calimachi* offre la direction de l'école, en 1816, au Macédonien *Panait Gobdelas*, „membre de différentes académies étrangères". Il enseignait en grec l'algèbre, la trigonométrie, la géométrie, la mécanique, l'hydraulique, l'optique, l'astronomie, la physique, la logique et la métaphysique. Il publia, également en grec, une Arithmétique (Iaşi, 1818), une Algèbre, une Histoire de la philosophie et une Économie politique. Mais ce sont là les dernières manifestations du courant grécisant.

En 1818, grâce aux efforts du métropolite *Veniamin Costache* et du futur prince *Mihail Sturza*, on donne comme collègue à *Gobdelas,* comme professeur de l'art de l'ingénieur, le célèbre créateur de l'enseignement roumain en Moldavie *G. Asachi* (1788—1869), docteur en philosophie de Lwòw, ancien élève pour les mathématiques de Burg à Vienne, ancien étudiant pour les lettres en Italie, membre de plusieurs académies italiennes. Il fit imprimer en roumain une Arithmétique en 1834, une Algèbre en 1837, une Géométrie en 1838, une Trigonométrie Géodésie, Cosmographie en 1838, une théorie des Jeux du Hasard en 1826.

(à suivre)

NOTE MATEMATICE

21. — *Semnele întrebuinţate în teoria combinărilor.*

Problema No. 1238 din *„Revista Matematică din Timişoara"*, unde se notează cu Γ_m^n numărul combinărilor cu repetiţie a m obiecte luate câte n, mi-a sugerat subiectul acestei note. Am găsit indicaţiile necesare în cartea lui *Florian Cajori*: „A history of mathematical notations", vol. 1. Teoria combinărilor (socotind, bine-înţeles, şi cunoştinţele relative la aranjamente şi permutări) a făcut progrese mari în secolul al 17-lea, cu lucrările lui *Leibniz* („Ars combinatoria" 1666), *B. Frénicle de Bessy* („Abrégé des combinaisons", 1676), *J. Wallis* („De combinationibus, alternationibus et partibus aliquotis" 1685) şi, mai ales, a lui *Jakob Bernoulli I* ("Ars conjectandi", publicată în 1713, după moartea autorului).

Ultima lucrare, în deosebi, conţine aproape toate cunoştinţele noastre de astăzi relativ la teoria combinărilor. Semnele speciale, pentru aranjamente, permutări şi combinări, lipsesc însă; ele apar ceva mai târziu, în a 2-a jumătate a secolului al 18-lea.

Combinări. Incepem cu combinări, deoarece primul simbol cunoscut priveşte tocmai numărul combinărilor. Astfel, *Euler* înseamnă numărul combinărilor a n obiecte luate câte p cu $\left(\frac{n}{p}\right)$, într'un memoriu din 1778 şi cu $\left[\frac{n}{p}\right]$, într'un alt memoriu, din 1781. Liniuţa fracţionară dispare cu timpul, şi în 1827 matematicianul german *Andreas von Ettingshausen* scrie $\binom{m}{p}$, notaţiunea care se întrebuinţează şi azi în cărţile germane.

Mulţi alţi autori au scris şi scriu şi acuma, m_p, pe când în cărţile franceze şi ale noastre se întrebuinţează simbolul C_m^n. Ultimul simbol a fost câteodată scris şi altfel: ${}^mC_n$, sau mP_n, sau $N_s(a, b, c, d, \ldots)$, dacă avem m litere $a, b, c, d, \ldots$, N_s citinduse „numerus specierum" (*Martin Ohm*, 1829).

Combinările cu repetiţie se întâlnesc mai rar. Numărul lor se înseamnă cu Γ_m^n („Encyclopédie

des sciences mathématiques"), sau K_m^n (de ex, în „Cours d'Algèbre" de *B. Niewenglowski*, vol. 1); s'a mai scris şi $m H_n$ (matematicianul englez *Chrystal*).

Permutări. Numărul permutărilor a m obiecte se înseamnă cu P_m. Ştim că:

$$P_m = m(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = m!$$

Au existat multe semne pentru produsul a m numere întregi consecutive, dela 1 până la m inclusiv. *Euler* scria în 1751: $1\cdot 2\cdot 3\cdots m = M$, dar el n'a întrebuinţat această notaţie în mod sistematic. Pentru a prescurta expunerea, transcriu aici un tablou al diferitelor semne, arătând în paranteză numele autorilor care l-au întrebuinţat şi anul lucrării respective:

$5^* = 1.2.3.4.5$ (*J. B. Basedow*, 1774).

$\overline{u} = 1.2.3.4.5\ldots m$ (*Paolo Ruffini*, 1799).

$1^{m\,|\,1}$ şi $m!$ (*Christian Kramp*, 1808).

$\prod(m) = m!$ (*C. F. Gauss*, 1811).

$\underline{|m} = m!$ (*Thomas Jarett*, 1827).

Ultima notaţie are o importanţă deosebită, deoarece ea s'a răspândit repede în Anglia, unde a fost popularizată de *Todhunter*, iar de acolo a trecut în America. Chiar şi azi aproape toate (dacă nu toate) cărţile scrise în limba engleză întrebuinţează $\underline{|m}$, cu toate că $m!$ este mai comod şi mai uşor de tipărit.

Putem generaliza produsul $1.2.3\ldots m$, considerând produsul a m numere care formează o progresie aritmetică cu raţia r şi cu primul termen a. Au existat multe semne şi pentru acest produs.

Astfel, acelaş *Christian Kramp* scrie, în cartea sa „Élémens d'arithmétique universelle" (1808) şi în diferite alte lucrări:

$$a^{m\,|\,r} = a(a+r)(a+2r)\ldots[a+(m-1)r],$$

astfel că avem un caz particular:

$$1^{m\,|\,1} = 1.2.3.4\ldots m.$$

Un produs asemănător, când $r=1$, apare într'un memoriu al lui *A. T. Vandermonde* (1772), scris astfel:

$$[m]^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).$$

Iată şi notaţiile lui *Thomas Jarett* (1831):

$$\underset{m\,\pm\,r}{\underline{|n}} = n(n\pm r)(n\pm 2r)\ldots[n\pm(m-1)r];$$

pentru $r=-1$ avem:

$$\underset{m}{\underline{|n}} = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1]$$

şi, în particular:

$$\underline{|n} = n(n-1)(n-2)\ldots 1.$$

E interesant de ştiut că mulţi matematicieni mari evită simbolul $m!$, scriind explicit: $1.2.3.4\ldots m$. Printre aceştia putem cita pe: *J. J. Sylvester*, *A. Cayley*, *E. Picard*, *E. Borel*, *G. Salmon*, *P. Appel*, *C. Jordan*, *J. Bertrand*, *A. Clebsch* etc.

Ca şi la combinări, au existat diferite forme ale simbolului P_m, care nu prezintă mare importanţă.

Aranjamente. Numărul aranjamentelor a m obiecte luate câte n se înseamnă, de obicei cu A_m^n. Alte notaţii sunt rare, poate, şi din cauza că nu este nevoie de un semn special, întrucât avem: $A_m^n = C_m^n P_m$. Autorii germani întrebuinţează cuvântul „Variationen", iar cei englezi „variations"; simbolul se scrie, prin urmare, V_m^n.

Un matematician german *Martin Ohm* (1829) notează cu V' numărul aranjamentelor cu repetiţie. N'am întâlnit, în cărţiile moderne, decât o singură dată un simbol pentru numărul aranjamentelor cu repetiţie, anume, α_m^n („Cours d'Algèbre", de *B. Niewenglowski*, vol. 1]. N'am găsit, în cărţile uzuale, nici-un simbol special pentru numărul permutărilor a m elemente, printre care se găsesc α elemente identice a, β elemente identice b, ... etc. Acelaş *Martin Ohm* avea, pentru numărul unor asemenea permutări, semnul $N_s.\overset{m}{P'}(a^\alpha, b^\beta, c^\lambda, \ldots)$, unde N_s se citeşte „numerus specierum".

PETRE V. CAZANACLI

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXIX, No. 3, Noemvrie 1933. Localul Societăţii „*Gazeta Matematică*" (Solemnitatea punerei pietrei fundamentale). Sur le tétraèdre trirectangle, par *V. Thébault*. Două teoreme de geometrie, de *Marius Margulis*. Premiul „*Vasile Conta*".

2. *Boletin Matematico*, anul VI, N-rile 5 şi 6, Iulie şi August din Buenos-Aires, fondat şi redactat de *Dr. Ber-*

nardo I. Baidaff. Asupra sistemului diferențial a funcțiilor teta și sigma, de *A. Bloch.* Asupra evoluentelor, de *B. I. Baidaff.* 150 ani de la moartea lui *Leonard Euler.*

3. *Boletin Matematico Elemental*, anul IV, N-rile 7 și 8, Octomvrie 1933, din Buenos-Aires, fondat și redactat de *Dr. Bernardo I. Baidaff.*

4. *Chestiuni de examen*, propuse la secția matematică a Facultății de științe din Cluj. Este o broșură litografiată de 55 pagini pe care Societatea Licențiaților în Matematici dela Universitatea din Cluj, o redactează. Este importantă această publicație pentru d-nii studenți și toți cei ce se ocupă cu matematicile superioare, căci cuprinde chestiunile de matematici propuse la diferite examene de la Universitatea din Cluj, împreună cu soluțiile lor. Costul broșurei 30 lei.

5. Luăm cu plăcere cunoștință că elevii de la liceul *„Samuil Vulcan"* din Beiuș, s'au constituit într'o „Societate Matematică" sub conducerea distinsului lor profesor *Ștefan Musta*, pentru a mări dragostea și entuziasmul lor pentru matematici, lărgindu-și cunoștințele din acest domeniu.

PROBLEME REZOLVATE

1147. — *Dacă* x_1, x_2 *sunt rădăcinele ecuației:*

$$x^2 + p\,x + q = 0$$

și y_1, y_2 *sunt rădăcinele ecuației:*

$$(q - 2p + 4)y^2 - (4 - p)y + 1 = 0,$$

atunci se cere să se stabilească relațiunea:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2(y_1 + y_2) = 2.$$

V. ALACI

Rezolvind a 2-a ecuație din enunț, putem scri succesiv:

$$y_{1,2} = \frac{4 - p \pm \sqrt{(4-p)^2 - 4(q - 2p + 4)}}{2(q - 2p + 4)} =$$

$$\frac{4 - p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2(q - 2p + 4)}.$$

Multiplicând și numărătorul și numitorul cu conjugata numărătorului, avem:

$$y_{1,2} = \frac{(4-p)^2 - (p^2 - 4q)}{2(q - 2p + 4)(4 - p \mp \sqrt{p^2 - 4q}} =$$

$$\frac{4(q - 2p + 4)}{2(q - 2p + 4)(4 - p \mp \sqrt{p^2 - 4q}}$$

sau:

$$(1) \qquad y_{1,2} = \frac{1}{2 + \dfrac{-p \mp \sqrt{p^2 - 4q}}{2}}$$

Rezolvând și prima ecuație din enunț, avem:

$$(2) \qquad x_{1,2} = \frac{-p \mp \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Relația (1) în virtutea relației (2), se poate scri:

$$y_{1,2} = \frac{1}{2 + x_{1,2}}$$

adică:

$$y_1 = \frac{1}{2 + x_1}$$

$$y_2 = \frac{1}{2 + x_2}$$

Aceste relațiuni aduse la formă întreagă, devin:

$$x_1 y_1 + 2 y_1 = 1$$

$$x_2 y_2 + 2 y_2 = 1,$$

care adunate ne dau:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + 2(y_1 + y_2) = 2,$$

tocmai relația cerută.

Soluții cu calcule mai multe, date de d-rele: *Antoniu V. Emilia* (lic. Oltea Doamnă, Iași), *Popescu N Maria* (Șc. Polit., Timișoara) și de d-nii: *Anastasescu Mihai* (bacalaureat, Târgoviștea), *Chiriac C-tin* (lic. Milit, Iași), *Cojocaru M. Marin* (lic. Milit., Craiova), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Dima Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Ionescu Argetoaia C. Emil* (student, București), *Mazilu Punait* (lic. Internat, Iași), *Mereuță Emilian*, *Negrea A. Leonte-Mircea* (licențiat în Matematici), *Păun V. Nicolae* (Șc Polit, Timișoara), *Popa D. Traian* (Giurgiu), *Popescu Greaca Vlad* (lic. Milit., Cernăuți), *Preda C. C-tin* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Predoescu I. Marin* (bacalaureat, Craiova), *Predoescu Traian* (lic. Milit., Craiova), *Sâmbotin Gh.* (Sub-Lt), *Săndulescu I. Ion* (Șc. Polit., Timișoara), *Segârceanu M. Marin* (lic. Milit., Craiova), *Theoharide Lucian* (Șc. Pregăt. de Ofițeri, București), *Tarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureș) și *Vasiliu-Leoben Gh.* (Inginer).

1162. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \dfrac{x^{2m} + 2a}{y^{2m}} + \dfrac{y^{2m} + 2a}{x^{2m}} + 1 = 0 \\ x^{2m} + y^{2m} + x^m y^m + b = 0 \end{cases}$$

ION MARGINEANU

Punând pentru prescurtare:

$$(1) \qquad \begin{cases} x^m = u \\ y^m = v, \end{cases}$$

sistemul dat adus la formă întreagă, devine:

$$\begin{cases} u^4+v^4+2au^2+2av^2+u^2v^2=0 \\ u^2+v^2+uv=b \end{cases}$$

Adunând în prima ecuaţie a^2 ambilor membrii, observăm că putem scri:

$$\begin{cases} (a+u^2+v^2)^2-u^2v^2=a^2 \\ u^2+v^2+uv=-b \end{cases}$$

s u:

$$\begin{cases} (a+u^2+v^2+uv)(a+u^2+v^2-uv)=a^2 \\ u^2+v^2+uv=-b \end{cases}$$

Prima ecuaţie ţinând seamă de a 2-a se simplifică, astfel că obţinem sistemul:

$$\begin{cases} u^2+v^2-uv=\dfrac{a^2}{a-b}-a=\dfrac{ab}{a-b} \\ u^2+v^2+uv=-b \end{cases}$$

Prin adunare şi scădere, deducem:

$$\begin{cases} u^2+v^2=\dfrac{b^2}{2(a-b)} \\ 2uv=\dfrac{b(b-2a)}{a-b} \end{cases}$$

Adunând şi scăzând aceste ecuaţiuni, apoi extrăgând rădăcina patrată, obţinem:

$$\begin{cases} u+v=\pm\sqrt{\dfrac{b(3b-4a)}{2(a-b)}} \\ u-v=\pm\sqrt{\dfrac{b(4a-b)}{2(a-b)}} \end{cases}$$

Adunând şi scăzând aceste ecuaţii, deducem:

$$\begin{cases} u=\dfrac{\pm\sqrt{b(3b-4a)}\pm\sqrt{b(4a-b)}}{2\sqrt{2(a-b)}} \\ v=\dfrac{\pm\sqrt{b(3b-4a)}\mp\sqrt{b(4a-b)}}{2\sqrt{2(a-b)}} \end{cases}$$

In total avem 4 sisteme de soluţii pentru u, v.

Inlocuind aceste sisteme de valori a lui u, v în sistemul (1) pe care apoi îl rezolvăm, obţinem:

$$\begin{cases} x=\sqrt[m]{\dfrac{\pm\sqrt{b(3b-4a)}+\sqrt{b(4a-b)}}{2\sqrt{2(a-b)}}}\times \\ \qquad\left(\cos\dfrac{2k\pi}{m}+i\sin\dfrac{2k\pi}{m}\right) \\ y=\sqrt[m]{\dfrac{\pm\sqrt{b(3b-4a)}\mp\sqrt{b(4a-b)}}{2\sqrt{2(a-b)}}}\times \\ \qquad\left(\cos\dfrac{2k\pi}{m}+i\sin\dfrac{2k\pi}{m}\right), \end{cases}$$

unde $k=0, 1, 2, \ldots m-1$, iar $i=\sqrt{-1}$.

Soluţii date de d-nii: *Chiriac C-tin* (lic. Milit, Iaşi), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M.* (lic. Milit., Craiova), *Ghiocel V. Vasile* (Giurgiu), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Lăţea P. C-tin* (Şc. Milit. de Artilerie) *Lupescu Gh. Corneliu* (lic Roman), *Martoş V. Grigore* (lic. Milit, Chişinău), *Mereuţă-Neamţ Emilian, Negrea A. Leonte-Mircea* (licenţiat în Matematici), *Popa B. Ioan* (Şc. Polit, Timişoara), *Popa Nicolae, Predoescu I. Marin* (bacalaureat, Craiova), *Predoescu Traian* (lic. Milit., Craiova), *Stănescu M. Emil* (lic. Milit., Craiova) *Ştefănescu Anibal* (Bucureşti), *Stoica Ioan* (Sub-Lt) şi *Tica P. Marin-Gal.*

1169. — *Să se demonstreze că oricare ar fi p întreg pozitiv, expresia:*

$$3^{4p+2}+2\times 4^{3p+1},$$

este divizibilă prin 17.

M I. PREDOESCU

Insemnând cu E expresia dată, observăm că putem scri succesiv:

$$E=9\times 81^p+8\times 64^p=9\times(4\times 17+13)^p+$$

$$8\times(3\times 17+13)^p=\text{mult. } 17+9\times 13^p+$$

$$\text{mult. } 17+8\times 13^p=\text{mult. } 17+(9\times 8)\,13^p=\text{mult. } 17$$

Soluţii date de d-nii: *Amăresteanu F. M.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Budeanu C-tin* (Bucureşti), *Boisnard Jean* (lic Spiru-Haret, Bucureşti), *Chiriac I. C.* (lic. milit., Iaşi), *Ciancilian A.* (Balcic), *Coandă I. Virgil* (lic. milit., Craiova), *Cojocaru M. Marin* (bacalaureat, Craiova), *Ghiocel V. Vasile* (bacalaureat, Giurgiu), *Godeanu I. Vasile* (lic. milit., Craiova), *Ionescu C. Emil* (bacalaureat). *Lupescu Gh. Corneliu* (lic. Roman) *Mazilu P.* (lic. Internat, Iaşi), *Mecu I. Milail* (Bucureşti), *Mereuţă—Neamţ Emilian, Negrea A. Leonte—Mircea* (Brăila), *Popescu Adrian, Predoescu M. Traian* (lic. milit., Craiova) *Săndulescu I. Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Stănescu Emil* (lic. milit., Craiova), *Stoica I. G.* (Sub-Lt), *Tica Marin* (Sub-Lt) şi *Vasiliu—Leoben Gh.* (Inginer).

Altă soluţie. Putem scri evident:

$$3^{4p+2}+2\times 4^{3p+1}=9^{2p+1}+2^{6p+3}=$$

$$9^{2p+1}+8^{2p+1}$$

Dar o expresie de forma:

$$a^{2p+1}+b^{2p+1}, \qquad (p \text{ întreg pozitiv})$$

anulându-se pentru $a=-b$, se divide prin $a+b$.

Rezultă astfel că expresia:

$$9^{2p+1}+8^{2p+1}$$

se divide prin:

$$9+8=17,$$

ceea ce trebuia dovedit.

Soluții analoage date de d-ra: *Roșca Șt. Veronica* (Craiova) și de dnii: *Băleanu D-tru* (Șc. milit. de Artilerie), *Crișan I. Iacob* (lic. milit., Tg.-Mureș), *Lățea P. C-tin* (Șc. milit. de Artilerie), *Mehedeinți D.* (lic. milit., Tg.-Mureș), *Pâslariu V. Vasile* (lic. Bârlad) *Preda C. C-tin* (lic. milit., Tg.-Mureș), *Pupezescu Ion* (Șc. Polit., Timișoara), *Stoica N. D-tru* (lic. milit, Tg.-Mureș) și *Țarălungă D-tru* (lic., milit., Tg.-Mureș).

1172. — *Să se determine a și b $(0<a<b)$, astfel ca ecuațiile:*

$$x^3-ax^2-243x+a^2b=0$$

$$x^3+(1+8\sqrt{3})x^2+(8\sqrt{3}-27)x-27=0.$$

să admită două rădăcini comune și în acest caz să se rezolve.

NICOLAIE V PAUN

Să rezolvăm ecuația a 2-a, ea se poate scri:

$$x^2(x+1)+8\sqrt{3}x(x+1)-27(x+1)=0,$$

sau:

$$(x+1)(x^2+8\sqrt{3}-27)=0.$$

Rădăcinele acestei ecuații sunt:

$$x_1=-1, \qquad x_{2,3}=-4\sqrt{3}\pm 5\sqrt{3},$$

deci:

$$x_1=-1, \qquad x_2=\sqrt{3}, \qquad x_3=-9\sqrt{3}$$

Prima ecuație având două rădăcini comune cu a 2-a, aceste două rădăcini pot fi:

(1) $\qquad (-1, \sqrt{3})$

(2) $\qquad (-1, -9\sqrt{3})$

(3) $\qquad (\sqrt{3}, -9\sqrt{3})$

1°. Scriind că prima ecuație din enunț are rădăcinele (1), rezultă că a și b trebuie să satisfacă relațiile:

$$\begin{cases} -1-a+243+a^2b=0 \\ 3\sqrt{3}-3a-243\sqrt{3}+a^2b=0 \end{cases}$$

Scăzându-le obținem:

$$-1-3\sqrt{3}+2a+243+243\sqrt{3}=0,$$

de unde:

$$a=-(121+120\sqrt{3})$$

Cum avem $a<0$, nu-i nevoie să aflăm și valoarea corespunzătoare lui b, fiindcă vedem că enunțul nu-i satisfăcut, $a>0$.

2°. Dacă prima ecuație din enunț ar admite rădăcinele (2), ar rezulta că a și b, ar trebui să satisfacă ecuațiile:

$$\begin{cases} a^2b-a+242=0 \\ a^2b-243a=0, \end{cases}$$

care scăzute ne dau, $a=-1$.

Cum avem $a<0$, prima ecuație n'ar putea avea rădăcinele (2), căci ne-ar da cum am văzut $a<0$, contrar enunțului.

3°. Pentru ca prima ecuație să admită rădăcinele (3), trebuie ca a și b să satisfacă ecuațiile:

$$\begin{cases} a^2b-3a-240\sqrt{3}=0 \\ a^2b-243a=0 \end{cases}$$

Scăzându-le, găsim:

$$a=\sqrt{3},$$

valoare care introdusă în a 2-a ecuație a sistemului, ne dă:

$$b=81\sqrt{3}$$

Astfel avem:

(4) $\qquad a=\sqrt{3}, \qquad b=81\sqrt{3},$

care satisfăcând și condiția cerută în enunț $0<a<b$, satisfac în întregime prima parte a enunțului.

Ecuațiile din enunț ținând seamă de (4), devin:

$$x^3-\sqrt{3}x^2-243x+243\sqrt{3}=0$$

$$x^3+(1+8\sqrt{3})x^2+(8\sqrt{3}-27)x-27=0$$

Prima are rădăcinele:

$$x_1=9\sqrt{3}, \qquad x_2=\sqrt{3}, \qquad x_3=-9\sqrt{3}$$

și a 2-a:

$$x_1 = -1\ ,\quad x_2 = \sqrt{3}\ ,\quad x_3 = -9\sqrt{3}$$

Soluţii date de d-nii: *Chiriac C-tin* (lic. milit., Iaşi), *Coandă I. Virgil* (lic. milit., Craiova), *Godeanu Ig. Vasile* (lic. milit., Craiova), *Ionescu C. Emil* (student, Bucureşti), *Marteş V. Grigore*, *Popescu Adrian*, *Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Negrea A. Leonte Mircea* (Brăila) şi *Săndulescu I. Ioan* (Şc. Polit., Timişoara).

PROBLEME PROPUSE

1248. — Trouver les carrés de huit chiffres tels que les deux nombres formés par leurs tranches de quatre chiffres soient deux nombres pairs ou impairs consécutifs.

V. THÉBAULT

1249. — Să se determine c astfel ca expresiunea:

$$817^{277} + 679^{517} - c$$

să fie divizibilă prin 41.

VASILE GODEANU

1250. — In triunghiul dreptunghic A B C se duce bisectoarea A D a unghiului drept şi fie E şi F proecţiile ortogonale ale lui D, respectiv pe A B şi A C. Notând cu a, b, c laturile triunghiului, să se arate că avem relaţiunile:

$$\overline{EB} + \overline{FC} = \frac{a^2}{b+c}$$

$$\frac{2}{\overline{AD}^2} = \frac{1}{\overline{CD}^2} + \frac{1}{\overline{BD}^2} = \frac{a^2+2bc}{b^2c^2}$$

STEFAN MUSTA

1251. — Fie A I înălţimea triunghiului A B C dreptunghic în A, iar M un punct mobil pe mediatricea ipotenuzei B C.

Să se demonstreze că axa radicală a cercurilor cu centrele în M şi I şi cu razele respectiv M B şi I A trece printr'un punct fix.

COL. GH BUICLIU

1252. — Se consideră ecuaţia:

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0.$$

Să se transforme această ecuaţie prin substituţia:

$$x = \frac{y-a}{3},$$

găsindu-se condiţia ca ecuaţia transformată să fie o ecuaţie binoamă; să se rezolve ecuaţia astfel definită.

MIHAIL BOTEZ

1253. — Se dă determinantul de ordinul r.

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} b & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c & b & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & b \end{vmatrix}$$

Se cere să se demonstreze că avem:

$$\Delta_r = (b-c)^{(p)}, \qquad \text{pentru: } r \geqq 2p,$$

unde (p) înseamnă că după dezvoltarea binomului $(b-c)^p$, termenii dezvoltării trebuesc înmulţiţi pe rând cu determinanţii din şirul:

$$\Delta_{r-p},\ \Delta_{r-p-1},\ \Delta_{r-p-2},\ \dots,\ \Delta_{r-2p}.$$

V. ALACI

1254. — Să se rezolve ecuaţia:

$$\cos^3 x + \cos(A-x)\cos(B-x)\cos(C-x) = 0,$$

A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu.

Caz particular: $A = 30^\circ$, $B = 60^\circ$, $C = 90^\circ$.

SUB LT A. I. STAN

1255. — Notaţiile fiind cele obicinuite într'un triunghiu, să se demonstreze că avem:

$$\sum \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{r}{2R}$$

$$\sum \frac{r_a^2}{h_a + 2r_a} = 2R - r$$

CEZAR IVANESCU

INFORMAȚIUNI

La Redacțiunea „Revistei Matematice din Timișoara" se primesc abonamente pentru „BOLETIN MATEMATICO", Anul al VI-lea, costul unui abonament fiind de 300 lei și „BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL", Anul al IV-lea, costul abonamentului fiind de 125 lei, cari se publică în Buenos-Aires. Amândouă 400 lei.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II — XII, cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**

Administration :
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Abonamentul pe anul XIII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL XIII. 15 IANUARIE 1934 No. 11.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1 V. ALACI: O CLASA DE IDENTITATI ALGEBRICE
2. P. SERGESCU: HISTOIRE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES EN ROUMANIE.
3. NOTE MATEMATICE: 22, 23
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1138, 1176, 1177.
6. PROBLEME PROPUSE: 1256-1263.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Artegrafice „Tipografia Românească"

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Şcoala Politechnică din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare

---

ANUL XIII — No 11. TIMISOARA, 15 IANUARIE 1934

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREȚUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie.

REDACȚIA: Prof. V. ALACI
Școala Politechnică din Timișoara.
ADMINISTRAȚIA: Prof. C. TEODORESCU
Școala Politechnică din Timișoara.

O CLASĂ DE IDENTITĂȚI ALGEBRICE

De
V. ALACI

1. Fie n cantități diferite între ele, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. Atunci este cunoscută descompunerea:

$$(1) \qquad \frac{1}{(x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{x-\alpha_i},$$

unde:

$$(2) \qquad k_i = \frac{1}{(\alpha_i-\alpha_1)\,(\alpha_i-\alpha_2)\cdots(\alpha_i-\alpha_{i-1})\,(\alpha_i-\alpha_{i+1})\,(\alpha_i-\alpha_{i+2})\cdots(\alpha_i-\alpha_n)} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}{}' (\alpha_i-\alpha_k)},$$

accentul de la Π însemnând că trebuie să excepțăm $k=i$.

2. Expresiunea (1) se mai poate scri:

$$(3) \qquad \frac{1}{(x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{\alpha_i}}$$

Presupunând:

$$|x| < |\alpha|,$$

α fiind cea mai mică dintre cantitățile α_i, fracțiunea

$$\frac{1}{1-\frac{x}{\alpha_i}}$$

se poate dezvolta în serie absolut convergentă, astfel că (3) devine:

$$(4) \qquad \frac{1}{(x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i}\left(1+\frac{x}{\alpha_i}+\frac{x^2}{\alpha_i^2}+\cdots\right)$$

Considerăm acum polinomul de gradul n:

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n, \qquad (a_n = 1)$$

cu rădăcinele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, ceea-ce ne permite a scri:

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = (x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n),$$

unde în virtutea relațiilor cunoscute dintre rădăcinile și coeficienții unei ecuații, avem:

$$(5) \qquad \begin{cases} \Sigma\, \alpha_1 = -a_{n-1} \\ \Sigma\, \alpha_1 \alpha_2 = a_{n-2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Sigma\, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1} = (-1)^{n-1} a_1 \\ \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = (-1)^n a_0 \end{cases}$$

Multiplicând ambii membrii ai relației (4) prin:

$$-(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n),$$

avem:

$$-1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n)\left(1+\frac{x}{\alpha_i}+\frac{x^2}{\alpha_i^2}+\cdots\right)$$

Efectuând înmulțirea din membrul al 2-lea și în urmă identificând coeficienții aceloraș puteri a lui x, deducem o infinitate de identități algebrice, anume:

$$(6)\quad \begin{cases} a_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i} = -1 \\ a_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i} + a_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i^2} = 0 \\ a_2 \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i} + a_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i^2} + a_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i^3} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_r \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i} + a_{r-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i^2} + \dots + a_0 \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i^{r+1}} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

In aceste identităţi (6) privind ca necunoscute pe:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i^2}, \dots, \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i^r}, \dots$$

putem deduce prin recurenţă sau mai bine prin regula lui *Cramer*, valoarea acestor necunoscute şi obţinem:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i^r} = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 \dots 0 & -1 \\ a_1 & a_0 & 0 \dots 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \dots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ a_{r-1} & a_{r-2} & a_{r-3} \dots a_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 \dots 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \dots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ a_{r-1} & a_{r-2} & a_{r-3} \dots a_1 & a_0 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{(-1)^r}{a_0^r} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \dots\dots 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \dots\dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r-1} & a_{r-2} & a_{r-3} \dots\dots a_1 \end{vmatrix}$$

unde $r = 1, 2, \dots$. Avem astfel următoarele identităţi algebrice în număr infinit, echivalente cu (6):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i} = -\frac{1}{a_0}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i^2} = \frac{1}{a_i^2},$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i^3} = -\frac{1}{a_0^3} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_2 & a_1 \end{vmatrix} = \frac{a_0 a_2 - a_1^2}{a_0^3}, \dots,$$

$$(7)\quad \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{\alpha_i^r} = \frac{(-1)^r}{a_0^r} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \dots\dots 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \dots\dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r-1} & a_{r-2} & a_{r-3} \dots\dots a_1 \end{vmatrix}$$

unde k_i se va înlocui cu valorile date de (2), iar $a_0, a_1, \dots a_n$ se vor înlocui cu valorile date de (5); asemenea pentru $r > n$ se va înlocui a_r prin zero.

Identităţile (7) în număr infinit, formează clasa de identităţi algebrice ce ne propusesem a o stabili.

Observare importantă. Privind identităţile (7) în care înlocuim numai pe k_i cu valorile date de (2), iar pe $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ îi păstrăm cum sunt, putem formula următorul enunţ:

Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sunt rădăcinele ecuaţiei:

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0, \quad (a_n = 1)$$

atunci între rădăcinele acestei ecuaţii şi coeficienţii ei există identităţile în număr infinit, date de relaţiile (7).

Aplicaţii. 1°. Pentru $n = 3$, primele trei identităţi (7) scrise dezvoltat, în care înlocuim pe k_i prin valorile date de (2) şi pe a_0, a_1, a_2, a_3 prin valorile date de (5), devin:

$$\frac{1}{\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)} + \frac{1}{\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)} + \frac{1}{\alpha_3(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)} = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$$

$$\frac{1}{\alpha_1^2(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)} + \frac{1}{\alpha_2^2(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)} + \frac{1}{\alpha_3^2(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1}{\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2}$$

$$\frac{1}{\alpha_1^3(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)} + \frac{1}{\alpha_2^3(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)} + \frac{1}{\alpha_3^3(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)} =$$

$$\frac{(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1)^2 - a_1 a_2 a_3 (a_1 + a_2 + a_3)}{a_1^3 a_2^3 a_3^3}$$

Observare. Dacă în aceste identităţi luăm:

$$a_1 = \frac{1}{a}, \qquad a_2 = \frac{1}{b}, \qquad a_3 = \frac{1}{c}$$

şi facem unele simplificări, obţinem identităţile:

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1$$

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a+b+c$$

$$\frac{a^4}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^4}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)} = a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$$

Aceste identităţi se găsesc şi în „*Culegere de Probleme*“ Algebră, Cap. IV, N-rile 28, 29, 30, dar stabilite pe altă cale.

2°. *Se dă ecuaţia:*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^3 = 0,$$

cu rădăcinele α_1, α_2, α_3, *atunci între rădăcinile şi coeficienţii acestei ecuaţii există relaţiunea:*

$$\frac{1}{\alpha_1^4 (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} + \frac{1}{\alpha_2^4 (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)} + \frac{1}{\alpha_3^4 (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)} = \frac{1}{a_0^4} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \\ 1 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

Aceasta este una din identităţile (7), pentru $r=4$, $n=3$, care s'ar putea stabili şi direct.

HISTOIRE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES EN ROUMANIE[1)]

PAR

P. SERGESCU

(suite)

À Bucarest, on appelle comme professeur de sciences à l'École Saint-Sava, en 1818, le Transylvain *G. Lazar* (1794—1823), ancien étudiant à Vienne pour la philosophie, l'histoire et le droit, ancien topographe de l'armée autrichienne, esprit très vibrant et très combattif pour l'idée nationale. Il avait composé, étant étudiant, une Géographie mathématique, une Pédagogie, une Grammaire roumano-allemande, une Géographie et une Histoire de la Transylvanie. Comme professeur, il enseigna l'arithmétique, la géographie historique, la géométrie, la géodésie et il écrivit en roumain une Arithmétique et une Trigonométrie rectiligne (en 1821, mais imprimée un siècle plus tard). Après le départ de *Lazar,* sa chaire fut occupée par un jeune homme de 19 ans *I. Eliade Rădulescu* (1802—72), un des fondateurs de la culture roumaine, professeur, homme de lettres, philologue, mathématicien, imprimeur, auteur de plusieurs dizaines de volumes. Nous soulignons ici l'importance de la publication, en 1832, dans des conditions excellentes, de son Arithmétique, composée d'après *Francoeur.* Sous l'influence française, cette arithmétique fait l'éloge du système métrique; elle crée la nomenclature mathématique roumaine.

Les brillants commencements de l'enseignement en roumain décidèrent la direction des écoles valaques à envoyer des boursiers à l'étranger pour préparer les futurs professeurs. Les premiers quatre boursiers, à Pise et à Paris, furent *Pandele* pour les mathématiques, *Simion Marcu ou Marcovici* chargé d'acheter des instruments de géométrie, *E. Poteca* pour la philosophie et *Moroiu* pour le droit. *Pandele,* désespéré par l'insuffisance de sa préparation scientifique, se suicida à Paris. *S. Marcu* succéda comme professeur à Eliade, entre 1827 et 1830. Sa leçon d'ouverture traite de l'histoire des mathématiques et cite *Talès, Pythagora, Platon, Tartaglia, Bombelli, Galilée, Viet (sic), Newton, Euler* („l'Allemand“), *d'Alembert, La Grange, La Plas (sic).* Outre ces boursiers, plusieurs fils de boyards font leurs études à Genève ou Paris, comme *C. Brăiloiu,* qui y étudie le droit, la philologie classique, l'algèbre et la géométrie. Le plus célèbre parmi eux est *Petrache Poenaru* (1799—1875). Élève de l'Institut polytechnique de Vienne en 1824, il y achète des instruments d'ingénieur, en 1826, il suit les cours de l'École polytechnique de Paris, travaille à la Charte de la France, en 1827 il fait breveter le premier stylo;

il fit ensuite un voyage d'études en Angleterre. Ce fut un des organisateurs de l'enseignement scientifique moderne et roumain dans les Principautés Danubiennes, et auteur de nombreuses oeuvres didactiques, mathématiques, dictionnaires. Il publia une Géométrie d'après *Legendre* en 1837 et une Algèbre d'après *Alpentaufer* en 1841. Le premier boursier moldave avant 1833, *G. Săulescu*, fut envoyé à Vienne.

L'occupation russe des Principautés et le règlement organique (1831—48) eurent une bonne influence sur le développement de l'enseignement scientifique *roumain*, en anéantissant les derniers vestiges de la vieille école grecque. Le secrétaire de la commission de rédaction du règlement organique en Moldavie fut *G. Asachi*. On institua quatre genres d'écoles. Dans les écoles élémentaires, on enseignait l'arithmétique jusqu'aux fractions et la mécanique pratique, 4 ans. Dans les écoles secondaires („umanioare"), 4 ans, on étudiait durant deux ans toute l'arithmétique et la comptabilité. Dans les écoles complémentaires, 3 ans, on enseignait un an la géométrie et l'algèbre, un an la physique et un an la chimie. Enfin les études spéciales, pour les mathématiques, duraient 3 ans et avaient pour but de former les ingénieurs. On enseignait en 1re année la trigonométrie, le lever des plans et l'algèbre supérieure, en 2e année le calcul infinitésimal et la géodésie et en 3e année la mécanique et l'architecture. Le professeur de 1re année devait enseigner aussi la géodésie ; les cours de mécanique et de calcul constituaient une seule chaire. *G. Asachi* est nommé proviseur des études à Iaşi, on nomme comme professeur d'arithmétique *Gh. Filipescu*, en 1831, on propose le Transylvain *A. Gavra*. *G. Asachi* enseigne les mathématiques d'après *Bézout*. En 1835, le prince *Mihail Sturza* (1834—49) fonda les cours supérieurs, en créant l'*Academia Mihaileană*, commencement de l'Université de Iaşi, avec des Facultés de philosophie, avec des cours annexes de géométrie pratique et un institut technique pour la fabrication des instruments, des Facultés de Droit et de Théologie. On crée un cabinet de physique et de mathématiques. Comme professeurs il faut citer : *Freywald* pour l'architecture et la géométrie, *D. Asachi* pour l'architecture, *T. Stamati*, ancien boursier à Paris et en Prusse, pour la physique et les mathématiques, *A. Costinescu* pour l'art de l'ingénieur, la géométrie descriptive, la comptabilité et la mécanique populaire, *I. Zefirescu*, de retour de Bohême, pour la chimie. En 1840, *Ion Ghica* (1816—97) ancien élève de Paris où il a suivi les cours de l'École des mines et des mathématiques, est appelé à Iaşi pour organiser les études pour l'art de l'ingénieur (4 ans), avec le *Français Hommaire* de Hell et avec *A. Costinescu*. On croit que *Ghica* fut le premier professeur de géométrie analytique en Roumanie, à l'Académie Mihaileană. Il fut un personnage considérable de la Roumanie contemporaine, écrivain célèbre, économiste, homme politique, président du Conseil. En 1841, s'ouvrait l'École d'Arts et Métiers de Iaşi, avec des modèles de machines apportés par *Czihak* de l'étranger. Les cours à cette époque se faisaient d'aprés *G. Asachi* pour les mathématiques élémentaires ; *T. Stamate* enseignait d'après *Salamon, Chara, Baumgartner, Pope ;* pour la mécanique il y avait les manuscrits de *Zefirescu* et *Costinescu ;* l'architecture était enseignée d'après *Stamper, Rondelt, Gerstner*. Le programme de 1843 des écoles secondaires à Iaşi était trop compliqué : à 11 ans un élève devait apprendre l'algèbre jusqu'aux équations du second degré, la géométrie, la stéréotomie, à 12 ans la trigonométrie, les logarithmes, la chimie.

L'enseignement à Bucarest sous le règlement organique est assez analogue à celui de Moldavie ; les études supérieures se font au collège Saint-Sava. En 1832—38 on y trouve comme professeurs de mathématiques *Gh. Pop* pour l'arithmétique, *P. Poenaru* pour la géométrie, *D. Paulid* (ou Pavel) pour l'algèbre. *G. Pop* enseigne l'arithmétique d'après *Francoeur* et, plus tard la géométrie d'après *Legendre*. Mais son Arithmétique publiée en 1835 n'est pas composée d'après un modèle français ; c'est pourquoi elle n'emploie pas le système métrique et n'étudie pas les fractions décimales ; c'est à peine son arithmétique de 1850 traduite du français, qui étudie le système metrique. Cette connexion entre le système métrique français et les fractions décimales peut être suivie aussi ailleurs : l'arithmétique de 1852 de *Lazzarini* ne parle d'aucune de ces questions, tandis que celle de

Vârgolici de 1860, traduite du français, leur donne une grande extension. *D. Paulid* publie en 1850 la première trigonométrie roumaine, composée d'aprés *Lefebure* de *Fourcy*, en 1855 une arithmétique, en 1852 une algèbre, en 1868–69 une arithmétique rationnelle en deux volumes. En 1841, on envoie comme boursier pour étudier la physique *Mihai Gogu*, et après sa mort, le futur professeur de l'Université de Bucarest *Alexe Marin*, ensuite le futur recteur de Bucarest *Al. Orăscu* pour l'architecture; en 1847 on trouve comme boursier pour les mathématiques à Paris le boyard *Al. Golescu*, premier ingénieur roumain, en 1839, de l'École centrale de Paris. On les retrouve, vers 1850, comme professeurs à Saint-Sava, très préoccupés de la publication des manuels scientifiques en roumain. *Alexe Marin* (1814—95) publie une Arithmétique en 1843, une Géométrie, une Astronomie populaire en 1839, une Mécanique usuelle en 1842; il a inauguré les cours libres avec des expériences de physique à Bucarest et fut un des premiers professeurs de la nouvelle Faculté des Sciences de l'Université de Bucarest. *Al. Orăscu* publia une Géométrie descriptive, d'après *Fourcroy* en 1857. L'organisateur et le chef de cet enseignement scientifique en Valachie pendant presque trente ans fut *P. Poenaru*.

III.

DÉBUTS DE LA CRÉATION SCIENTIFIQUE ORGANISATION DES UNIVERSITÉS (1850–1900)

La révolution de 1848 donne une nouvelle orientation aux études scientifiques dans les Principautés. Le prince *Barbue Stirbey* (1849—1856) commence l'organisation de l'enseignement technique supérieur, d'abord en 1850 avec *Al. Orăscu*, qui ouvrit une école pour les ingénieurs. Il y enseigna la géométrie descriptive, tandis que *Emanoil Constantinescu* enseignait la géométrie analytique. En 1852, le prince *Stirbey* fait venir en Valachie le célèbre ingénieur français *Léon Lalanne* (1811—92), membre de l'Institut, ancien directeur de l'École des Ponts et Chaussées de Paris. Il créa l'École des Conducteurs publics dont sortit plus tard, grâce à *G. Duca*, l'École nationale des Ponts et Chaussées de Bucarest, dont le rôle technique et scientifique en Roumanie fut immense. En 1853, *Lalanne* propose l'introduction du système métrique en Roumanie, proposition appuyée par *Poenaru* et *Orăscu*, approuvée par le prince, mais devenue loi à peine en 1864 sous le prince *Cuza*, prince des Principautés roumaines réunies (1859—1866).

En Moldavie, *M. Cogălniceanu* proposa en 1850 la création d'une école d'ingénieurs dont la durée des études fut de 12 ans. Mais ce projet ne se réalisa pas et la seule école technique supérieure roumaine jusqu'en 1919, fut celle de Bucarest.

L'Academia Mihaileană de Iaşi fut réorganisée après 1849. On y trouve comme professeurs de sciences *Chinezu*, ancien étudiant ès mathématiques à Paris, *I. Pangrati* pour les mathématiques, *I. Popp* (1829—65), ancien élève à Vienne de *Salamon*, *Kolbe* et *Honig*, ayant fini l'Institut polytechnique de Vienne en 1856, *St. Micle*, qui fait les premiers cours libres de chimie, avec expériences, à Iaşi. En 1860, on donne l'organisation actuelle de l'enseignemet en Moldavie, en transformant l'Académie en Université de Iaşi. Les premiers professeurs de la Faculté des Sciences furent: *I. Popp* pour la géométrie analytique (son cours, comprenant aussi la géodésie, inspiré de *Burg*, est resté manuscrit); *I. Ionescu* pour les finances, *S. Micle* pour la chimie. En 1863 on nomma à la chaire de calcul différentiel et intégral *N. Culianu* (1842—1915), licencié ès mathématiques de Paris. En 1861, le gouvernement roumain avait essayé sans succès, de le faire admettre comme élève à l'École normale supérieure de Paris. Il fut recteur de l'Université de Iaşi pendant 18 ans (1880—98), et publia en 1870 le premier tome de son cours de calcul différentiel et intégral. Depuis 1865, et jusqu'en 1906, il garda la chaire d'astronomie et publia une Algèbre (1882, 1894), une Trigonométrie, une Cosmographie (1893, 1902); il laissa le manuscrit de son cours d'astronomie et une étude géométrique des courbes usuelles. Le premier licencié ès sciences mathématiques de Iaşi fut, en 1863. *C. Mănescu*, le futur professeur de calcul. Les autres professeurs de mathématiques de l'Université de Iaşi furent *I. Melik*, auteur d'une Arithmétique (1867) et d'une Géométrie (1869). *M. Toni*, pour la mécanique rationnelle, *C. Climescu*, premier Roumain admis comme élève à l'École normale supérieure de Paris, *J. Rallet*,

le Transylvain *Emilian*. Ce groupe, avec les professeurs secondaires *Lucescu*, *V. Paladi*, *I. V. Praja*, créa une atmostphère mathématique à Iași, ville où la Société des médecins et des naturalistes était établie depuis 1830. C'est ainsi qu'on est arrivé à la publication de la première revue mathématique roumaine *Recreații Științifice* (1883—89).

L'Université de Bucarest fut créée en 1864. Parmi ses premiers professeurs de mathématiques et physiques, nous citons les suivants : *Al. Orăscu*, pour la géométrie descriptive, architecte du Palais de l'Université, ancien ministre et recteur († 1894). suivi de *E. A. Pangrati* (1864—31) à la mort duquel cette chaire fut supprimée ; *D. Petrescu* († 1896) pour l'astronomie. *E. Bacaloglu* (1830-90), pour la physique, est le premier Roumain ayant publié des mémoires mathématiques originaux dans des périodiques étrangers (en 1859) ; créateur d'uue Société des Sciences éphémère, grand animateur, il publia une Algébre en 1866 et une Physique en 1870. Son successeur *D. Negreanu* (1858—1908), docteur ès sciences de Paris, introduisit les travaux pratiques, publia de nombreux mémoires à l'étranger et un admirable Traité de physique. Sa chaire fut occupée par *D. Bungetianu* (1860—32) auteur d'études sur la vitesse du son dans les liquides et sur la résonance des liquides. La chaire de mécanique rationnelle fut occupée en 1878 par *Spiru Haret* (1851—1912), le premier Roumain docteur ès sciences mathématiques de Paris (30, I, 1878, Sur l'invariabilité des grandes axes des orbites planétaires), organisateur moderne de l'enseignement roumain, ancien ministre, auteur d'une Mécanique sociale. En 1882 on nomma professeur de géométrie analytique *C. Gogu* et professeur de l'algèbre supérieure et de la théorie des fonctions *D. Emmanuel*. *C. Gogu*, docteur de Paris (7, II, 1882, Sur une inégalité lunaire) publia deux mémoires dans les *Annales de l'Académie roumaine* et fonda en 1894 la Société *Les Amis des Sciences mathématiques*, à Bucarest (1854—1897). *D. Emmanuel* (né en 1854) a professé jusqu'en 1929. Son cours de la *Théorie des Fonctions* en deux volumes contient les théories de *Weierstrass* et de *Cauchy* dans le tome I^er^ et la théorie des fonctions elliptiques dans le tome II. En 1912 on créa la chaire d'algèbre supérieure, occupée par *Trajan Lalescu* (1882—1929), auteur d'une thèse remarquable sur l'équation intégrale de *Volterra* ; son volume sur *L'équation de Fredholm*, imprimé à Paris en 1912 est classique ; il a publié un *Traité de géométrie analytique* en 4 volumes, un *Calcul numérique*, de nombreux mémoires sur la théorie de *Galois*, les séries trigonométriques, les équations intégrales, l'histoire des mathématiques. La chaire de calcul différentiel et intégral fut occupée un certain temps par le général *Jacques Lahovary* († 1907).

A côté des Universités, les Sociétés scientifiques, les Revues de spécialités et les Congrès marquent les débuts de l'activité scientifique créatrice en Roumanie. L'Académie roumaine a été fondée en 1866. En 1872 on crée une Société des ingénieurs qui publie 17 fascicules de la revue *Inginerul*. En 1876, on crée une Société des ingénieurs et architectes, continuée depuis 1881 par l'actuelle Société polytechnique de Bucarest. Après les essais infructueux de *Bacaloglu* en 1862 et 1868, le grand animateur *Dr. C. I. Istrati* (1850—1918) professeur de chimie et doyen à Bucarest, réussit à créer en 1890 (24, III) la Société des Sciences physico-chimiques, fusionnée le 13, I, 1897 avec les Amis des Sciences mathématiques sous le nom de l'actuelle *Société roumaine des Sciences*, qui publie depuis 1897 un Bulletin, divisé par spécialités depuis 1922. C'est toujours l'enthousiasme créateur du *Dr. Istrati* qui a organisé l'Association roumaine pour l'avancement des Sciences, qui tint 8 Congrès avec un très grand succès entre 1902 et 1912, suivis d'un Congrès des naturalistes (Cluj, 1928) et de deux congrès des mathématiciens (Cluj, 1929 ; Severin, 1932). Comme périodique ayant contribué à créer cette atmosphère scientifique, signalons la revue mensuelle *Gazeta Matematica*, qui paraît régulièrement depuis 1895.

IV.
BIBLIOGRAPHIE.

1. *I. Beles:* Inventar al cărților de matematici românești. *Gazeta matematică*, XXII, 1917, Iași.

2. *P. Cazanacli: I. Pop.* primul profesor de geom. analitică la Iași. *Revista Științifică Adamache*, XVI, 1930, Iași.

3. *C. Climescu:* „Curs întreg de matematică curată". *Gazeta Mat.*, XXII et XXIII, 1917 et 1918, Iași.

4. *C. Climescu:* Un vechiu manuscript de aritmetică. *Gazeta Mat.*, XXVII, 1921, București.

5. *V. Cristescu:* Aritmetica lui *N. Milescu*. *Gazeta mat.*, XXXV, 1929.

6. *N. Bănescu:* Viaţa şi opera lui *D. Philippide*. 1924, Cluj.

7. *G. Buicliu:* Aritmetica şi Algebra lui *G. Manu*. *Gazeta mat.*, XXXI, 1926, Bucureşti.

8. *I. Ionescu:* Istoricul societăţei politecnice. 243 p, 1927, Bucureşti.

9. *I. Ionescu:* Călătoria astronomului *Boscoviei* prin Moldova. *Bul. Soc. Politecnice*, XLII, 1928, Bucureşti.

10. *I. Ionescu: Dr. C. I. Istrati. Bul. Soc. Polit.*, XLII, 1928, Bucureşti.

11. *I. Ionescu:* Călătoria miladi *Craven* în Muntenia în 1786. *Bul. Soc. Polit.*, XLIII, 1929, Bucureşti.

12. *I. Ionescu:* Călătoria unui matematician prin România în secolul al XVIII-lea. *Natura*, XIV, 1925, Bucureşti.

13. *I. Ionescu:* Aritmeticile lui *Lazzarini*. *Natura*, XVII, Bucureşti.

14. *I. Ionescu:* Activitatea D-lui *Emmanuel* în învăţământul tecnic superior. *Mathematica*, II, 1929, Cluj.

15. *I. Ionescu:* Matematica în regulamentul organic. *Gazeta mat.*, XXI, 1915, Bucureşti.

16. *I. Ionescu:* Cahier d'arithmétique, 1804. *Gazeta mat.*, XXIII., 1918, Iaşi.

17. *I. Ionescu:* Algèbre, à Jassy, en 1807. *Gazeta mat.*, XXIII, 1918, Iaşi.

18. *I. Ionescu:* Remarque sur la Géométrie, en 1805. *Gazeta mat.*, XXIII, 1918, Iaşi.

19. *I. Ionescu:* Curs întreg de matematică curată. *Gazeta mat.*, XXIV, 1919, Bucureşti.

20. *I. Ionescu:* Aritmetica lui *Eliade* (1832). *Gazeta mat.*, XXIV, 1919, Bucureşti.

21. *I. Ionescu:* Istoricul Infiinţărei secţiei matematice a societăţei române de ştiinţe. *Gazeta mat.*, XXVII, 1922, Bucureşti.

22. *I. Ionescu:* Elemente a calculului practic. *Gazeta mat.*, XXIX, 1924, Bucureşti.

23. *I. Ionescu:* Prima trigonometrie română. *Gazeta mat.*, XXI, 1916, Bucureşti.

24. *I. Ionescu:* Lalanne şi introducerea sistemului metric. *Bul. Soc. Politecnice*, XLIV, 1930, Bucureşti.

25. *N. Iorga:* Istoria Literaturei Româneşti (veac XVIII şi XIX), 5 vol., Bucureşti.

26. *N. Iorga:* Istoria Românilor prin călătorii. 4 vol, Bucureşti.

27. *N. Iorga:* Istoria Invăţământului românesc. 1 vol., 1928, Bucureşti.

28. *N. Iorga:* Introducerea ştiinţelor în învăţământul românesc, 1919, Bucureşti.

29. *Istoricul desvoltărei tecnice în România.* (Publication collective dirigée par *I. Ionescu*, 3 vol., 1520 p., 77 études), 1931, Bucureşti.

30. *T. Lalescu:* Bibliografia românească matematică. *Gazeta mat.*, XXII, 1917, Iaşi.

31. *T. Laiescu:* Cărţi de matematică din Transilvania. *Gazeta mat.*, XXII, 1917, Iaşi.

32. *T. Lalescu:* Viaţa şi activitatea lui *G. Lazăr*. *Gazeta mat.*, XXII, 1917, Iaşi.

33. *T. Lalescu:* Cărţi şi manuscrise greceşti de matematică din ţările române. *Gazeta mat.*, XXIII, 1918, Iaşi.

34. *T. Lalescu:* Catalogul manuscriselor româneşti de matematică. *Gazeta mat.*, XXIII 1918, Iaşi.

35. *T. Lalescu:* Unul din primii profesori de matematică munteni *S. Marcovici*. *Gazeta mat.*, XXIX. 1924, Bucureşti.

36. *T. Lalescu:* Câteva date asupra lui *S. Marcu* zis *Marcovici*. *Gazeta mat.*, XXIX, 1924, Bucureşti.

37. *C. D. Orăseanu:* Aritmetica românească de *M. Milo* la 1795. *Gazeta mat.*, XXVIII, 1922. Bucureşti.

38. *M. Paulian:* Istoricul liceului Carol I. *I. Maiorescu* II, 1932, Craiova.

39. *G. Ţiţeica:* Desvoltarea ştiinţelor matematice în România. *Bul. Soc. Politecnice*, XLV, 1931, Bucureşti.

40. *C. Erbiceanu:* Boeri culţi şi profesori la Academiile din Iaşi şi Bucureşti. Memoriile istorice ale Academiei Române, XXVII, 1905, Bucureşti.

Des renseignements précieux se trouvent encore dans les *Discours de Réception* à l'Académie Roumaine et dans les „notices" publiées depuis 1915 dans *Gazeta Matematică*.

NOTE MATEMATICE

22. — *Formules relatives au triangle.*

1°. La formfule (20), *Revista matematica*, XIII, p 86 doit être remplacée par celle-ci :

$$\underset{(V)}{M'} = -\left(\frac{a\,b\,c}{r\left(\frac{a^2}{p-a}+\frac{b^2}{p-b}+\frac{c^2}{p-c}\right)}\right)^2.$$

2°. En tenant compte des relations :

$$(p-a)\,r_a = (p-b)\,r_b = (p-c)\,r_c = S,$$

les formules :

$$\sum \frac{a^2}{p-a} = \frac{4\,p\,(R-r)}{r},\quad \sum a^2\,(p-a) = 4\,p\,r\,(R+r),$$

que nous avons données, *loc. cit.*, conduisent aux suivantes :

$$a^2\,r_a + b^2\,r_b + c^2\,r_c = 4\,p^2\,(R-r)$$

$$\frac{a^2}{r_a}+\frac{b^2}{r_b}+\frac{c^2}{r_c} = 4\,(R+r).$$

V. THÉBAULT

23. — *Asupra problemei 1137.*

In problema cu acest număr, rezolvată la pag. 95 din acest an, d-l *V. Thébault* cere numerele $a\,b\,c$, $d\,e\,f$, $g\,h\,i$ cu toate cifrele semnificative şi diferite între ele aşa în cât să avem :

$$(1) \qquad a\,b\,c = d\,e\,f + g\,h\,i,$$

iar $a\,b\,c$ să fie cub.

In problema analoagă, 3491 rezolvată la pag.

343, Vol. XXXIX din *Gazeta Matematică*, d-l *V. Thébault* cere ca numărul *abc* să fie patrat perfect.

Atât problema 1137 din *R. M. T.* cât şi problema 3491 din *G. M.* sunt cazuri restrictive ale problemei 3672, propusă de mine şi rezolvată în *Gazeta Matematică* pag. 226, Vol. XXXV, în care ceream ca numerele să verifice relaţiunea (1), fără nici o restricţiune.

In nota dela pag. 344, Vol. XXXIX G. M. arătam la punctnl 5° că dacă s-ar înpune în relaţiunea (1) restricţia ca *abc* să fie cub, s-ar găsi singura soluţiunea 729.

COL. GH. BUICLIU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, vol. XXXIX No. 4, Decemvrie 1933. Sur une transformation géométrique, par *R, Goormaghtigh.* Relaţii trigonometrice într'un tringhiu în legătură cu punctele *Feuerbach* de *N. N. Mihăileanu.* Premiul „Inginer *Al. Roşu*".

2. *N. Abramescu.* Sur les courbes de convergence des séries de polynômes à une variable complexe et leur application à la determination des fonctions holomorphes dans des domaines donnés. (Extrato dagli Annali di Matematica pura ed applicata, serie IV, Tome XII, 1933—34.)

3. *O carte preţioasă.* De curând a apărut în editura *„Denoël et Steele"* un tablou al manifestărilor intelectuale, sub toate aspectele: literar, ştiinţific, artistic, filosofic, — din ultimii treizeci de ani, în Franţa. Cele patru volume cari constitue acest „Tableau du XX^e siècle" încearcă să înfăţiseze publicului cetitor o sinteză precisă şi un indreptar în înţelegerea evoluţiei culturii franceze din ultimile trei decade.

Necesitatea unei asamenea lucrări stă în însăşi configuraţia culturii contemporane, nu numai franceză, ci, ingenere. europeană. Prea multele rezultate şi descoperiri parţiale, pe de o parte, iar pe de alta, fărămiţarea, în parcele din ce în ce mai mici, cu specializări prea restrânse, a domeniilor culturale dintre care cea mai de acuzat este ştiinţa, fac anevoiasă şi chiar de nerealizat, posibilitatea unei perspective de ansamblu, omului care, înainte de a încerca să cunoască, să *ştie* totul, vrea mai întâi să *înţeleagă*, să *ordoneze*, pentru a se putea orienta şi alege după voie ceace crede că este esenţial şi cu adevărat necesar. De mult au încetat timpurile în cari un *Pico della Mirandola* se putea făli că nu dă greş în faţa niciunei întrebări, dela oricine ar fi venit şi de orice fel ar fi fost. Pe atunci, unui spirit special dotat, îi era, dacă nu uşoară totuş, într'o oarecare măsură, posibilă instruirea cât mai desăvârşită, cât mai complectă. Astăzi, nimeni nu se mai gândeşte să reediteze fenomenul italianului cu atotştiinţa tomurilor de enciclopedie în creer. Nu mai poate fi vorba de o instruire complectă. Şi dacă acest privilegiu l-am pierdut — (mai precis, ar trebui să spunem că nu l-au avut în întregime oamenii niciodată, înclusiv lăudărosul *Pico*) — ne rămâne o altă posibilitate de satisfacere a cerinţelor inteleciului nostru dornic de a şti: este *cunoaşterea, înţelegerea de ansamblu.* Dacă ne referim la produsele culturale ale timpurilor mai îndepărtate, unealta cu care reuşim această ordonare a valorilor este istoria. Şi atunci când nu se mulţumeşte să fie numai arhivă cu fişe şi înşirări de nume şi fapte moarte, ci urmăreşte critic, după o axă precisă, promovarea valorilor prin interdepenţa ce le-a dat fiinţă şi le-a susţinut, — unealta aceasta este de preţ şi îndestulătoare. Dar istoria, prin însăşi definiţia ei, este ştiinţa faptelor consumate. Pentru fiece manifestare, de orice fel ar fi ea, există, în timp, o limită pe care istoria n'o poate depăşi. Dincoace de limita aceasta începe epoca acelor creaţii ce îşi pot avea rădăcinile în timpuri mai vechi, dar cari sunt produse ale zilelor noastre trăesc în ritmul de astăzi şi fiind vii, fiindcă în necontenită evoluţie, sunt situate dincolo de posibilităţile de preţuire ale istoriei. Istoria judecă fapte ce au fost şi nu mai pot deveni

Dacă ne mulţumim să privim puţin numai în câmpul acestei prime treimi de veac ne dăm seama cu uşurinţă că sutele de memorii şi lucrări, cari toate posedă caracterul specific epocei, de a fi fragmentare, de a nu îmbrăţişa o anumită problemă ştiinţifică în totalitatea ei pentru a epuiza tot ceeace elementele cu cari s'a pornit ar fi putut da, — nu pot fi decât în foarte mică măsură (excepţiile explicându-se prin aceea că aparţin cel puţin pe jumătate, prin natura lor, creaţiilor secolului trecut) obiecte ale istoriei. Altceva decât preţuiri istorice trebue să aşieptăm dela acei ce-şi iau sarcina să ne înfăţişeze, in slove tipărite, corpul viu al culturii zilelor noastre. Iată dece colecţia despre care am vorbit la început nu se intitulează: *istorie;* ci modest: *tablou.* Un tablou în care sunt înscrise manifestările ce au fost crezute rodnice şi al căror aport, în concertul general al culturii, pare că este sau va deveni de preţ.

Cel de al doilea volum al „Tabloului sec. al XX-lea", „Ştiinţele" (560 pag.) este scris de: *P. Sergescu, A. Boutaric, J. Rostand.* Redactarea primei fascicole: „Matematicile"[1]) a fost încredinţată de către directorul colecţiei, D-l *Gonzague Truc*, D-lui Prof. *Petre Sergescu,* dela Universitatea din Cluj. Alegerea aceasta trebue să ne bucure. Pe D-l Prof. *Sergescu* îl ştim de mult un inimos propagator al virtuţilor geniului românesc, între şi dincolo de fruntariile ţării. Pentru acei ce ştiu că D-l Prof. *Sergescu,* pe a sa cheltuială şi cu preţul sdruncinării sănătăţii, colindă ţara cu gândul bun de a împlânta, adânc, în conştiinţa ascultătorilor conferinţelor D-sale. sămânţa încrederii în posibilităţile creatoare ale geniului românesc; pentru acei ce îi cunosc activitatea ştiinţifică desfăşurată, paralel catedrei dela care profesează, în publicaţii, congrese şi comunicări în cadrul societăţilor de matematici din ţară: pentru acei ce ştiu că numele D-sale a trecut graniţele ţării pentru a reprezenta, cu competenţă, în congrese internaţionale sau pe catedrele Universităţilor străine (Sorbona, Bruxelles, Poitiers, Clermont Ferrand, — anul acesta fiind invitat, către sfârşitul lunii Ianuarie, la Univ. din Montpellier) ştiinţa română, reuşind, pentru merite personale să fie ales membru corespondent al Academiei din Varşovia şi membru al Academiei Masaryk din Praga, — alegerea despre care vorbim, făcută în persoana D-sale, nu miră. I s'a încredinţat D-lui Prof. *Sergescu* redactarea fascicolei privitoare la manifestările matematice din ultimii treizeci de ani, din Franţa, credem, ca unuia ce s'a impus cercurilor ştiinţifice străine prin activitatea sa pe tărâmul ştiinţei pure şi pe acela al istoriei matematicilor. In această din urmă ramură a activităţii sale profesorul *Sergescu* este poate singurul reprezentant mai de seamă dln ţară. Şi vom avea prilejul poate în curând să scriem tot în acest loc despre o lucrare a D-sale, promisă tiparului pentru anul 1934; şi care, înainte de a vedea lumina tiparului, aci în ţară, a fost prezintată şi cu priso-

[1]) *Pierre Sergescu,* Les Sciennes Mathématiques (extrait du „Tableau du XX-e siecle" en France), Ed. „Denoël et Steele", Paris, 182 pag.

sinţă preţuită în străinătate. Va fi o istorie, de a copcepţie originală, a matematicilor vechi, pânăla *Galileu*, creatorul spiritului mecanicei moderne.

Pentru a reveni la volumul despre care am voit să scriem câteva cuvinte aci, vom observa că această carte este dedicată, în primul rând, nu nouă celor de aci — cu toate că autorul este al nostru — ci publicului ştiinţific francez. Se simţea, chiar în ţara lui *H. Poincaré*, lipsa unei asemenea sinteze, cât mai complectă, mai circumspectă în aprecieri şi în erarhizarea valorilor. Materialul de puisat fiind recent şi în cantitate covârsitoare, autorul a fost silit să compulseze date şi fapte răspândite luxuriant în tratatele, memoriile, revistele unei abundente bibliografii. Dificultatea întocmirii unei asemenea sinteze i se va fi înfăţişat D-lui Prof. *Sergescu* scindată în mai multe grupe şi urmărindul în etape critice, la fiece pas.

O primă dificultate stă în ordinea expunerii, în chiar planul lucrării. Şi dilema: trebue urmărită evoluţia ştiinţelor matematice contemporane prin prisma personalităţilor creatoare sau prin filiera diferitelor ramuri, cari închid în caracterul lor specifice proprii? Dacă e vorba să se eşaloneze materialul în capitole după creatorii de rezultate noui, imposibilitatea apare manifestă. Ceeace este posibil pentru un *H. Poincaré*, *G. Darboux*, sau *E. Picard*, *E. Boxel*, *P. Painlaivé*, *P. Montel*, *P. Duhem*, — nu mai poate constitui o metodă când este vorba de matematicieni de mai mică factură, ale căror nume nu pot fi înscrise decât alături de două-trei rezultate, sau mai puţin însemnate sau prea parţiale şi în curs de desvoltare. Dacă ar fi fost vorba de o sinteză schiţată în linii cu totul generale, unde nu şi-ar fi avut locul decât rezultatele cu adevărat importante, atunci numele celor de mai sus ar fi putut prea bine să fie titluri de capitole; atâtea capitole câţi matematicieni de talia acestora sunt. Dar atunci s'ar fi trecut sub tăcere numele celorlalţi, — ceeace desigur nu putea fi în intenţia autorului. De vreme ce am amintit însă această modalitate de ordonare se înţelege că i-am presupus şi o posibilitate de realizare. Iată în ce ar consta: S'ar înscrie In fiecare capitol rodul creaţiei fiecărui matematician de valoare iar, ca o complectare, expunerea s'ar termina cu amintirea celor mai mici sau încă tineri, ale căror lucrări îşi au izvorul în opera maestrului; această din urmă parte a expunerii ar avea şi darul de a pune în evidenţă doza de prolificitate a spiritului acestuia. Tot atât de adevărat este însă că urmărirea acestui raport de filiaţie presupune multă trudă şi îndelungate cercetări. In ce ne priveşte, mărturisim că am fi dorit să întâlnim în cartea D-lui Prof. *Sergescu*, această preocupare mai îndeaproape îmbrăţişată; cele câteva remarce, părându-ni-se incidentale, ne fac să credem că nu au fost dela început încadrate în metodă.

Cel de al doilea plan de construcţie se situiază în directă opoziţie primului. Privit mai puţin atent, ar părea imediat acceptabil şi susceptibil de a duce la un rezultat pe deplin mulţumitor. Intr'adevăr, s'ar părea că dificultatea, în cazul orânduirii după ramuri distincte (capitole cuprinzând: unul, analiza matem., altul teoria funcţiunilor, etc.) nu stă decât în înşirarea unui număr prea mare de rezultate; dificultate care dealtfel — se observă cu uşurinţă — susistă şi în planul discutat mai sus. Totuş această orânduire, nu ne pare a fi cea nimerită. Şi dacă ar fi să invocăm motive, ne-am mulţumi să-i reproşăm numai înfăţişarea prea asemănătoare unui catalog bibliografic. Deasemenea, un astfel de plan nu ai fi nici în concordanţă cu ordinea naturală în care faptele matematice au luat naştere. Un singur capitol, cum ar fi de pildă cel al analizei matematice, ar părea ca un conglomerat de teoreme şi propoziţii, neînchegat, neunitar.

D-l Prof. *P. Sergescu* nu a adoptat în totul niciunul din aceste două planuri. Expunerea D-sale oscilează între înfăţişarea vie şi oarecum dinamică a primului şi cea statică, asemănătoare manualelor didactice, a celuilalt. Cu excepţia celui de al doilea capitol *(H. Poincaré)*, D-sa adoptă ca fir conducător cel de al doilea fef de ordonare, testat şi prin titlurile capitalelor, ţinându-se însă să înfăţişeze, pe cât i-a fost posibil, evoluţia fiecărei ramuri în acord cu personalităţile creatorilor faptelor despre cari se vorbeşte.

Cartea debutează printr'un capitol de generalităţi privitoare la moştenirea secolului trecut, pentruca din confruntarea mişcării matematice dinainte şi după 1900 să se poată mai cu uşurinţă scoate în evidenţă caracterul original al cercetărilor ultimilor treizeci de ani. Un capitol întreg este rezervat celui care a fost *H. Poincaré*, deschizător de noui drumuri atât în matematicile pure cât şi în fizica matematică. Numele lui stăruie în tot întinsul celorlalte capitale, aşa cum a stăruit geniul său în mai toate ramurile ştiinţei rapoartelor dintre mărimi — şi în filosofia matematicilor. Se simte, printre rânduri, cum acest nume este pomenit cu respectul şi dragostea unuia ce n'a precupeţit geniului lui *H. Poincaré*, nici preţuirea logică şi nici mărturisirea admiraţiei, ce porneşte din inimă.

Două ramuri au găsit mai cu deosebire, în geniul matematic francez, cultivatori şi susţinători de seamă: analiza matem. şi teoria funcţiunilor. Aceasta din urmă este creaţia marelui matematician — tot francez — al secolului trecut *Cauchy*. Actualmente, şeful autorizat al acestei şcoale este *D. E. Picard*. Sunt expuse în cartea d-lui Prof. *Sergescu* rezultatele obţinute de matematicianii francezi în toate ramurile: analiza matem. şi teoria funcţiunilor (ecuaţii: diferenţiale, cu derivate parţiale şi integrale, funcţiuni de variabile complexe şi reale, analiza funcţională, etc.), geometria şi astronomia, mecanica (mecanica raţională, hidro-dinamică) şi fizica matematică, — îucheindu-se cu capitalul filosofiei şi istoriei matematicilor, ai căror reprezentanţi de frunte sunt: *H. Poincaré*, *Le Roy*, *Conturat*, *P. Duhem*, *P. Tannery*, *P. Boutroux*, etc.

Nu am voit să facem cunoscută cetitorilor acestei reviste, materia în sine a cărţii. Deaceea, am schiţat numai, conţinutul — şi chiar mai puţin decât suficient. Dacă această parte a expunerii noastre informative nemulţumeşte cetitorul, ceeace este de aşteptat, din part-ne nu avem de răspuns decât un singur lucru: să-şi procure cât mai curând volumul D-lui Prof. *Sergescu*, pentrucă acolo va găsi, într'o franceză ce-ţi aminteşte stilul cărţilor lui *H. Poincaré*, tot ceeace condeiul nostru nu poate transcrie aci.

N. O. Zaharia.

PROBLEME REZOLVATE

1138. — *Să se verifice identitatea*:

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2},$$

unde:

$$A = y^4(x^{12}y^4 - 1) + 2x^2y^2(x^8y^8 - 1) + x^4(x^4y^{12} - 1$$

$$B = y^8(x^{16} - 1) + 4x^2y^6(x^{12}y^4 - 1) +$$

$$6x^4y^4(x^8y^8 - 1) + 4x^6y^2(x^4y^{12} - 1) + x^8(y^{16} - 1$$

Să se transforme apoi identitatea dată, într'o identitate trigonometrică prin substituţia:

$$x = e^{i\frac{\alpha}{2}}, \quad y = e^{-i\frac{\alpha_1}{2}}, \qquad (i = \sqrt{-1})$$

V. ALACI

Privind expresiunile lui A şi B, putem scri succesiv :

$$A = x^{12}y^8 - y^4 + 2x^{10}y^{10} - 2x^2y^2 + x^8y^{12} - x^4 =$$
$$x^8y^8(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - (y^4 + 2x^2y^2 + y^4) =$$
$$x^8y^8(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)^2 = (x^2 + y^2)^2(x^8y^8 - 1)$$
$$B = x^{16}y^8 - y^8 + 4x^{14}y^{10} - 4x^2y^6 + 6x^{12}y^{12} -$$
$$6x^4y^4 + 4x^{10}y^{14} - 4x^6y^2 + x^8y^{16} - x^8 =$$
$$x^8y^8(x^8 + 4x^6y^2 + 6x^4y^4 + 4x^2y^6 + y^8) -$$
$$(y^8 + 4x^2y^6 + 6x^4y^4 + 4x^6y^2 + x^8) =$$
$$x^8y^8(x^2 + y^2)^4 - (x^2 + y^2)^4 = (x^2 + y^2)^4(x^8y^8 - 1)$$

De aci rezultă :

$$\frac{A}{B} = \frac{(x^2 + y^2)^2(x^8y^8 - 1)}{(x^2 + y^2)^4(x^8y^8 - 1)} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$$

Identitatea dată este astfel stabilită.

Ţinând seamă de substituţia din enunţ să transformăm acum identitatea dată, într'o identitate trigonometrică :

Pentru aceasta privind expresiunile lui A şi B, observăm că putem scri :

$$A = x^6y^6(x^6y^2 - x^{-6}y^{-2}) + 2x^6y^6(x^4y^4 -$$
$$x^{-4}y^{-4}) + x^6y^6(x^2y^6 - x^{-2}y^{-6})$$
$$B = x^8y^8(x^8 - x^{-8}) + 4x^8y^8(x^6y^2 - x^{-6}y^{-2}) +$$
$$6x^8y^8(x^4y^4 - x^{-4}y^{-4}) +$$
$$4x^8y^8(x^2y^2 - x^{-2}y^{-6}) + x^8y^8(y^8 - y^{-8})$$

Inlocuind aceste valori în identitatea dată şi simplificând cu x^6y^6, avem :

$$\frac{(x^6y^2 - x^{-6}y^{-2}) + 2(x^4y^4 - x^{-4}y^{-4}) + (x^2y^6 - x^{-2}y^{-6})}{x^2y^2[(x^8 - x^{-8}) + 4(x^6y^2 - x^{-6}y^{-2}) + 6(x^4y^4 - x^{-4}y^{-4}) + 4(x^2y^6 - x^{-2}y^{-6}) + (y^8 - y^{-8})]} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$$

sau :

$$(1) \quad \frac{(x^6y^2 - x^{-6}y^{-2}) + 2(x^4y^4 - x^{-4}y^{-4}) + (x^2y^6 - x^{-2}y^{-6})}{(x^8 - x^{-8}) + 4(x^6y^2 - x^{-6}y^{-2}) + 6(x^4y^4 - x^{-4}y^{-4}) + 4(x^2y^6 - x^{-2}y^{-6}) + (y^8 - y^{-8})} = \frac{1}{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2}$$

Ţinând seamă de relaţiile de substituţie din enunţ şi de identităţile cunoscute ale lui *Euler*, observăm că putem scri în general :

$$(2) \quad x^a y^b - x^{-a}y^{-b} = e^{i\left(\frac{a\alpha + b\alpha_1}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{a\alpha + b\alpha_1}{2}\right)} = 2i\sin\frac{a\alpha + b\alpha_1}{2}$$

$$x^a y^b + x^{-a}y^{-b} = e^{i\left(\frac{a\alpha + b\alpha_1}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{a\alpha + b\alpha_1}{2}\right)} = 2\cos\frac{a\alpha + b\alpha_1}{2}$$

In virtutea acestor relaţiuni (2), în care vom lua valori potrivite pentru *a* şi *b*, identitatea (1) devine după ce simplificăm cu $2i$.

$$\frac{\sin(3\alpha + \alpha_1) + 2\sin(2\alpha + 2\alpha_1) + \sin(\alpha + 3\alpha_1)}{\sin 4\alpha + 4\sin(3\alpha + \alpha_1) + 6\sin(2\alpha + 2\alpha_1) + 4\sin(\alpha + 3\alpha_1) + \sin 4\alpha_1} = \frac{1}{4\cos^2\frac{\alpha - \alpha_1}{2}}$$

Aceasta este identitatea trigonometrică, în care se transformă identitatea algebrică din enunţ, în virtutea substituţiilor date.

Au stabilit identitatea algebrică dată, fară a o transforma într'o identitate trigonometrică, d-nii: *Chiriac C-tin* (lic. Milit, Iaşi), *Chirilă M., Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M. M.* (lic. Milit., Craiova), *Curchi Ioan* (student, Bucureşti), *Ghiocel V. Vasile* (Giurgiu), *Godeanu I. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Ionescu C. Emil* (bacalaureat), *Mihalcea N. Nicolae* (lic. Beiuş), *Pănoiu Emanoil* (student, Bucureşti), *Păunescu N.* (lic. Milit, Craiova), *Popa B. Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Popescu Adrian* (student), *Predoescu I. Marin* (Şc. Polit, Bucureşti), şi *Tica P. Marin-Gall.*

1176. — *Notaţiile fiind cele obisnuite într'un triunghiu, să se stabilească relaţia :*

$$\Sigma(r_a - r_b)^3 = 3\frac{p}{r}(a-b)(b-c)(c-a)$$

SUB.-LT. IOAN C. SAVIN

Din dezvoltarea :

$$(r_a - r_b)^3 = r_a^3 - 3r_a^2 r_b + 3 r_a r_b^2 - r_b^3 ,$$

deducem:

$$(1) \qquad \Sigma (r_a - r_b)^3 = 3 \Sigma r_a r_b (r_b - r_a)$$

Ţinând seamă de relaţiile cunoscute:

$$r_a = \frac{s}{p-a}, r_b = \frac{s}{p-b}, s = p r = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

relaţia (1) devine:

$$(2) \qquad \sum (r_a - r_b)^3 =$$

$$3 \sum \frac{s^2}{(p-a)(p-b)} \left(\frac{s}{p-b} - \frac{s}{p-a} \right) =$$

$$3 \sum \frac{s^3 (b-a)}{(p-a)^2 (p-b)^2} = 3 \sum \frac{s^4 (b-a)}{p r (p-a)^2 (p-b)^2} =$$

$$3 \sum \frac{p^2 (p-a)^2 (p-b)^2 (p-c)^2 (b-a)}{p r (p-a)^2 (p-b)^2} =$$

$$3 \frac{p}{r} \sum (p-c)^2 (b-a) = 3 \frac{p}{r} \left[p^2 \sum (b-a) - \right.$$

$$\left. 2p \sum c(b-a) + \sum c^2 (b-a) \right]$$

Cum:

$$\Sigma (b-a) = 0 , \qquad \Sigma c (b-a) = 0 ,$$

rezultă din (2):

$$\Sigma (r_a - r_b)^3 = \frac{p}{r} \Sigma c^2 (b-a) = 3 \frac{p}{r} [c^2 (b-a) +$$

$$a^2 (c-b) + b^2 (a-c)] = 3 \frac{p}{r} [b (c^2 - a^2) -$$

$$a c (c-a) - b^2 (c-a)] = 3 \frac{p}{r} (c-a) (b c + b a -$$

$$a c - b^2) = 3 \frac{p}{r} (c-a) [b (c-b) - a (c-b)] =$$

$$3 \frac{p}{r} (c-a) (c-b) (b-a)$$

Mai putem scri încă:

$$\Sigma (r_a - r_b)^3 = 3 \frac{p}{r} (a-b) (b-c) (c-a)$$

Am obţinut astfel tocmai identitatea dată.

Soluţii date de d-nii: *Chiriac C-tin* (lic. Milit, Iaşi), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M. Marin* (lic. Milit., Craiova), *Ghiocel V. Vasile* (bacalaureat, Giurgiu), *Godeanu Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Marteş V. Grigore*, *Mazilu P.* (lic. Internat, Iaşi), *Mecu I. Ilie* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Mereuţă Emilian* (student), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Păslariu Vasile* (lic. Bârlad), *Predoescu I. Marin* (bacalaureat, Craiova), *Predoescu Traian* (lic. Milit., Craiova), *Stănescu M. Emil* (lic. Milit., Craiova) şi *Theoharide Lucian* (Şc. Milit. de Geniu).

1177. — *Se cere numărul* A *format din factorii* 2, 5 *şi* 11 *ştiind că cel mai mare comun divizor al numerilor* A *şi* $\frac{21}{10}$ A *este* 484.

EMILIAN MEREUTA

Din enunţ rezultă că avem:

$$A = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot 11^{\gamma} ,$$

atunci:

$$\frac{21}{10} A = 2^{\alpha - 1} 3 \cdot 5^{\beta - 1} 7 \cdot 11^{\gamma}$$

Cum cel mai mare comun divizor a două numere descompuse în factori primi, se obţine efectuând produsul factorilor primi comuni cu exponenţii cei mai mici, rezultă că $c.m.m.c.d$ a numerilor A şi $\frac{21}{10}$ A, este:

$$2^{\alpha - 1} 5^{\beta - 1} 11^{\gamma}$$

Pe de altă parte din enunţ vedem că $c.m.m.c.d$ este 484, atunci rezultă:

$$2^{\alpha - 1} 5^{\beta - 1} 11^{\lambda} = 484 = 2^2 \cdot 11^2$$

Identificând exponenţii aceloraşi puteri a factorilor 2, 5, 11 din ambii membri, rezultă:

$$\alpha - 1 = 2 \qquad \alpha = 3$$

$$\beta - 1 = 0 \qquad \text{deci:} \qquad \beta = 1$$

$$\gamma = 2 \qquad \gamma = 2$$

Numărul cerut A, este:

$$A = 2^3 . 5 . 11^2 = 4840.$$

Soluţii date de d-nii: *Amăresteanu F. M.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Băbeanu D-tru* (Şc. Milit. de Artilerie), *Boian Ioan* (Ţăndăreni). *Ceasurescu Vasile* (Călăraşi), *Chiriac C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Coandă I. Virgil* (bacalaureat, Craiova), *Cojocaru M. M.* (lic. Milit., Craiova), *Ghiocel V. Vasile* (Giurgiu), *Godeanu Ig. Vasile* (lic. Milit., Craiova),

Lăţea P. C-tin, *Marteş Grigore* (lic. Milit., Chişinău), *Mazilu Panait* (lic. Internat, Iaşi), *Mecu Milail* (lic. Cantemir Bucureşti), *Mehedinţi D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Millea E.* (Sub-Lt), *Niţoiu V. Nicolaie* (lic. Milit., Chişinău), *Pâslariu V. Vasile* (lic Bârlad), *Petrescu P. Anastasie* (Craiova), *Popa Nicolae* (lic. Beiuş), *Popescu C. Ştefan* (lic. Milit., Craiova), *Porumbescu D.* (Tg-Ocna), *Predoescu I. Marin* (lic. Buzeşti, Craiova), *Predoescu Traian* (lic. Milit., Craiova), *Procopiescu Mihai* (lic. Milit, Tg-Mureş), *Săndulescu Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Secăroiu D-tru* (Sub-Lt), *Segârceanu M. Marin* (lic. Milit., Craiova), *Stoica Ioan* (Sub-Lt), *Şuşală Gh.* (lic. Milit, Chişinău) şi *Tutunaru D-tru* (Şc. Milit., de Artilerie).

PROBLEME PROPUSE

1256. — Pentru lucrarea unei şosele există patru echipe de lucrători. Prima ar termina singură lucrul în $8\frac{2}{3}$ zile, a doua în $12\frac{4}{5}$ zile, a treia în $15\frac{6}{7}$ zile şi a patra în $18\frac{8}{9}$ zile.

Se ia $\frac{3}{4}$ din prima echipă, $\frac{5}{6}$ din a doua, $\frac{5}{8}$ din a treia şi $\frac{7}{10}$ din a patra şi se formează o singură echipă.

In câte zile va termina acelaş lucru, noua echipă astfel formată.

VIRGIL CLAUDIAN

1257. — A şi B fiind două numere întregi pozitive care verifică relaţiunea:

$$A + 2B = \text{mult. } 3,$$

să se arate că ele verifică şi relaţia:

$$B + 2A = \text{mult. } 3.$$

Generalizare.

EUGEN VISA

1258. — On a:

$$1^6 + 2^6 + 3^6 + 4^6 + 5^6 = 44^2 + 47^2 + 47^2 + 119^2$$

$$1^6 + 3^6 + 5^6 + 7^6 + 9^6 = 242^2 + 245^2 + 266^2 + 690^2$$

Généraliser et montrer que les puissances sixièmes de cinq nombres en progression arithmètique forment une somme de quatre carrés.

V. THÉBAULT

1259. — Să se demonstreze că dacă două din cantităţile α_1, α_2, α_3, sunt imaginare conjugate, atunci expresiunea:

$$\frac{1}{\alpha_1^4 (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} + \frac{1}{\alpha_2^4 (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)} + \frac{1}{\alpha_3^4 (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2)},$$

este reală.

V. ALACI

1260. — Să se rezolve ecuaţiunea:

$$x - 1 = m + \sqrt{x^2 + 2(m+2)x + 4(m+1)},$$

presupunând m cunoscut. Apoi să se determine condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească m pentru ca valoarea găsită a lui x să convină ecuaţiei date.

COL. GH BUICLIU

1261. — Să se determine polinomul:

$$P(x) = A x^4 + B x^3 + C x^2 + D x + E$$

cu coeficienţii raţionali, ştiind că:

$$P(0) = 5, \qquad P(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

Să se arate că polinomul găsit, verifică şi relaţia:

$$P(\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}) = \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}.$$

I V MATIES

1262. — Fie CC' şi CC'' două isogonale variabile ce pleacă din vârful C al unui triunghiu ABC. Fie $A_{c'}, A_{c''}, B_{c'}, B_{c''}$ proecţiile lui A şi B pe cele două isogonale. Se cere locul geometric al punctelor:

$$P(A_{c'} A_{c''},\ B_{c'} B_{c''}) \quad \text{şi} \quad Q(A_{c'} B_{c''},\ A_{c''} B_{c'})$$

MIHAI SÜLI

1263. — Intr'un patrulater ce se poate circumscrie unui cerc se cunosc două laturi opuse, unghiul format de diagonale şi produsul diagonalelor.

Să se calculeze celelalte două laturi şi raza cercului înscris.

GH. D SIMIONESCU

INFORMAȚIUNI

La Redacțiunea „Revistei Matematice din Timișoara" se primesc abonamente pentru:

„BOLETIN MATEMATICO", Anul al VII lea
costul *special* a unui abonamente fiind de 200 lei,

„BOLETIN MATEMATICO ELEMENTAL",
Anul al IV-lea
costul *special* a abonamentului fiind de 100 lei.

Ambele Reviste se publică în Buenos-Aires, Republica Argentina.

Figurile ce însoțesc soluțiile problemelor, notelor și articolelor, trebuesc desemnate cu îngrijire pe foi albe (neliniate) și de e posibil în tuș.

De asemenea se găsesc broșate colecțiile R. M. T. din anii II — XII, cu prețul de lei 120 volumul și se trimet la cerere.

Fiecare problemă rezolvată, notă sau articol trebuesc scrise pe sferturi de coale de hârtie și însoțite de enunț. Problemele propuse trebuesc însoțite și de soluțiile lor.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată de el, și s'o iscălească.

Rugăm călduros pe corespondenții noștrii să facă cunoscut această REVISTĂ colegilor și camarazilor lor.

SPHINX

Revue mensuelle des questions récréatives

FONDÉE EN 1931

REVUE UNIQUE DANS SON GENRE
dans le monde entier

ABONNEMENTS :
1 an : Belgique, **30 fr.** France, **25** fr.
Etranger, 7 **belgas**

Administration :
SPHINX, Bruxelles 75, Rue Philippe Baucq

Legându-se colecția R. M. T., anul IX, în volum și rămânând numere răzlețe care nu au putut fi legate, putem trimete corespondenților noștri numere care eventual le lipsesc din colecție în schimbul sumei de 10 lei. Doritorii se vor adresa administrației revistei, trimițând suma prin mandat poștal.

Răspundem pe această cale, la toți acei corespondenți, care se plâng că anumite probleme nu le-au fost considerate, că aceasta se datorește sau faptului că acele soluțiuni au sosit întârziate, sau au fost greșite, sau n'au sosit de loc.

Evident că astfel de probleme nu pot fi luate în seamă.

Abonamentul pe anul XIII-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

100 (UNA SUTA LEI)

și se trimite pe adresa:

Prof. C. TEODORESCU,

Școala Politechnică din Timișoara.

ANUL XIII. 15 FEBRUARIE 1934 NO. 12.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 12 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 100 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. COL. GH. BUICLIU: FORMULE DE ANALIZA COMBINATOARE.
2. IOAN V. MATIEȘ CURBE PSEUDO-OMOGENE.
3. NOTE MATEMATICE: 24, 25.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 1178, 1179.
6. PROBLEME PROPUSE: 1264–1271.
7. TABLA DE MATERII.
8. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Artegrafice „Tipografia Românească"

„Orice profesor de matematici, din orice colţ al ţării şi de la orice şcoală, trebuie să fie apostol al specialităţii sale. Din felul cald şi luminos cum îşi face lecţiile, din drumul drept şi demn pe care îl urmează în viaţă, trebuie să apară limpede că judecata matematică precisă şi sigură, curată ca cristalul, are o înaltă şi admirabilă valoare educativă pentru viaţă.

Adevărul curat, adevărul drept, adevărul luminos, să fie îndreptarul vieţei noastre. Aceasta să fie contribuţia specialităţii noastre la îndrumarea neamului românesc, pe calea care-i stă deschisă".

G. ŢIŢEICA

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politechnică, Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Prof. C. Teodorescu**, Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

Taxa de Membru în „Comitetul de Conducere al Revistei Matematice din Timişoara" este pentru anul XIII, de 200 (două sute) lei.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat. Anii: II—XII inclusiv, broşate, 120 lei fiecare

---

Rugăm pe d-nii membrii ai „R. M. T." a ne trimite până la 1 Martie curent titlu ile, ocupaţiile şi adresele, pentru No. 1, Anul XIV al Revistei.

ANUL XIII — No. 12. TIMISOARA, 15 FEBRUARIE 1934

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PREŢUL UNUI NUMAR . . . . . 12 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 100 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie.

REDACŢIA: Prof. V. ALACI
Şcoala Politechnică din Timişoara.
ADMINISTRAŢIA: Prof. C. TEODORESCU
Rectorul Şcoalei Politechnice din Timişoara.

FORMULE DE ANALIZĂ COMBINATOARE

DE

COL. GH. BUICLIU

I. Divizibilitatea polinoamelor pune une ori în evidenţă relaţiuni, care nu se pot întrevedea altfel şi care adesea nici nu se pot verifica direct.

Iau ca exemplu problema 537, rezolvată în *Revista Matematică din Timişoara* la pagina 31, Vol. XII şi de care m-am ocupat în articolul: *„O problemă de divizibilitate“* de la pagina 97, Vol. XIII.

S-a demonstrat în acea problemă că: *polinomul:*

$$P = (x+1)^n - x^n - 1$$

se divide prin:

$$f^2 = (x^3 + x + 1)^2$$

dacă **n** *este de forma* **mult.** $6+1$.

Bazat pe această proprietate cunoscută se pot stabili relaţiuni interesante, scriind că restul împărţirei lui P prin f şi apoi prin f^2, este nul.

Dacă C_p^q este simbolul combinărilor a p obiecte luate câte q şi dacă se dezvoltă binomul din prima parte a lui P, se găseşte:

$$P = C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \cdots + C_n^{n-2} x^2 + C_n^n x .$$

Efectuăm, după regulile obişnuite, împărţirea lui P prin f, dând numai rezultatele sub formă de tabel, în care, în coloana I sunt înscrise numerele de ordine ai termenilor succesivi ai câturilor şi resturilor, în coloana II sunt înscrişi primii 2 termeni ai resturilor, iar în coloana III sunt termenii succesivi ai câtului.

I	II	III
1	$(C_n^2 - C_n^1) x^{n-2} + (C_n^3 - C_n^1) x^{n-3} + \cdots$	$C_n^1 x^{n-3}$
2	$(C_n^3 - C_n^2) x^{n-3} + (C_n^4 - C_n^2 + C_n^1) x^{n-4} + \cdots$	$(C_n^2 - C_n^1) x^{n-4}$
3	$(C_n^4 - C_n^3 + C_n^1) x^{n-4} + (C_n^5 - C_n^3 + C_n^2) x^{n-5} + \cdots$	$(C_n^3 - C_n^2) x^{n-5}$
.	. . . . .	. . . . .
i	$(C_n^{i+1} - C_n^i + C_n^{i-2} + \cdots) x^{n-i-1} + (C_n^{i+2} \quad C_n^i + \cdots) x^{n-i-2} + \cdots$	$(C_n^i - C_n^{i-1} + C_n^{i-3} - \cdots) x^{n-i-2}$
.	. . . . .	. . . . .
$n-3$	$(C_n^{n-2} - C_n^{n-3} + \cdots) x^2 + (C_n^{n-1} - C_n^{n-3} + \cdots) x$	$(C_n^{n-3} - C_n^{n-4} + \cdots) x$
$n-2$	$(C_n^{n-1} - C_n^{n-2} + \cdots) x - (C_n^{n-2} - C_n^{n-3} + \cdots)$	$C_n^{n-2} - C_n^{n-3} + C_n^{n-5} - \cdots)$

Aşa că restul R al împărţirei lui P prin f este:

$$R = (C_n^{n-1} - C_n^{n-2} + C_n^{n-4} - \cdots) x - (C_n^{n-2} - C_n^{n-3} + \cdots)$$

Conform problemei 537, când n este $6m+1$, P se divide prin f, deci R este nul, de unde:

$$C_n^{n-1} - C_n^{n-2} + C_n^{n-4} - C_n^{n-5} + \cdots = 0$$

$$C_n^{n-2} - C_n^{n-3} + C_n^{n-5} - C_n^{n-6} + \cdots = 0$$

Dar în aceste condiţiuni, se vede din tabel că termenul de rang $n-2$ al câtului este nul. Deci

ultimul termen al câtului este:

$$(C_n^{n-3} - C_n^{n-2} + C_n^{n-6} - C_n^{n-7} + \cdots)\, x,$$

iar ultimul rest care *trebue* să fie nul, este:

$$(C_n^{n-2} - C_n^{n-3} + C_n^{n-5} - C_n^{n-6} + \cdots)\, x^2 +$$
$$(C_n^{n-1} - C_n^{n-3} + C_n^{n-4} - \cdots)\, x$$

Concluzia este că dacă n este de forma $6m+1$, atunci:

$$C_n^{n-2} - C_n^{n-3} + C_n^{n-5} - C_n^{n-6} + \cdots = 0$$
$$C_n^{n-1} - C_n^{n-3} + C_n^{n-4} - C_n^{n-6} + \cdots = 0,$$

care conduce la relaţiunile interesante:

(1) $$C_n^{n-1} + C_n^{n-4} + C_n^{n-7} + \cdots = C_n^{n-2} + C_n^{n-5} +$$
$$C_n^{n-8} + \cdots = C_n^{n-3} + C_n^{n-6} + C_n^{n-9} + \cdots$$

Două din aceste sume sunt evident egale, după cum se va vedea în partea IV, când vom reveni asupra formulelor (1).

II. Insemnând prin Q câtul împărţirei lui P prin f, avem:

$$Q = C_n^1 x^{n-3} + (C_n^2 - C_n^1)\, x^{n-4} + \cdots$$
$$\cdots + (C_n^{n-3} - C_n^{n-4} + \cdots)\, x$$

Fie, pentru prescurtare:

$$U_n^3 = C_n^1$$
$$U_n^4 = C_n^2 - C_n^1$$
$$\cdots\cdots$$
$$U_n^{i+2} = C_n^i - C_n^{i-1} + C_n^{i-3} - C_n^{i-4} + \cdots$$

Cu aceste notaţiuni, Q devine:

$$Q = U_n^3 x^{n-3} + U_n^4 x^{n-4} + \cdots + U_n^{n-2} x^2 + U_{n+1}^{n-1} x$$

Efectuând împărţirea lui Q prin f şi ţinând seamă de cele stabilite la problema 537, rezultă că dacă n este de forma $6m+1$, atunci:

$$R_1 = (U_n^{n-4} - U_n^{n-5} + U_n^{n-7} - \cdots)\, x^2 +$$
$$(U_n^{n-3} - U_n^{n-4} + U_n^{n-6} - \cdots)\, x,$$

trebue să fie nul ori care ar fi x. De unde rezultă relaţiunile:

(2) $$U_n^{n-3} + U_n^{n-6} + U_n^{n-9} = U_n^{n-4} + U_n^{n-7} + \cdots$$
$$\cdots = U_u^{n-5} + U_u^{n-8} + \cdots$$

III. Inpărţind derivata lui P prin f şi anulând restul ca la I, pentru $n = 6m+1$, se găsesc relaţiuni e:

(3) $$C_{n-1}^{n-1} + C_{n-1}^{n-4} + \cdots = C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-5} + \cdots$$
$$\cdots = C_{n-1}^{n-3} + C_{n-1}^{n-6} + \cdots$$

IV. Dacă în (1) se ţine seamă că n este $6m+1$, atunci cele 3 sume egale se pot scrie respectiv:

$$C_n^3 + C_n^6 + \cdots + C_n^{n-1}$$
$$C_n^2 + C_n^5 + \cdots + C_n^{n-2}$$
$$C_n^1 + C_n^4 + \cdots + C_n^{n-3}$$

Sub această formă se vede imediat că prima şi a doua sumă sunt egale în virtutea identităţii cunoscute:

$$C_p^q = C_p^{p-q}$$

V. Imi propun acum problema inversă, anume, să găsesc condiţia ca P să fie divizibil prin f, sau ceia ce este tot una, că caut valorile lui n pentru care au loc relaţiunile (1).

Fie:

$$S_0 = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \cdots$$
$$S_1 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \cdots$$
$$S_2 = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \cdots$$

sumele coeficienţilor binomului luaţi din 3 în 3.

Pentru calculul acestor sume, întrebuinţez următoarea metodă generală, care mi-a fost comunicată de d-l *Gh. Th. Gheorghiu*, coleg de redacţie la *„Gazeta Matematică"*.

Fie:

(4) $$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

şi 1, α, β rădăcinele ecuaţiei:

$$x^3 - 1 = 0.$$

Se cunosc relaţiunile:

(5) $$\begin{cases} 1 + \alpha^p + \beta^p = 0 & p \neq 3n \\ 1 + \alpha^{3p} + \beta^{3p} = 3 \end{cases}$$

Dacă se adună (4) cu:

$$F(\alpha x) = a_0 + a_1 \alpha x + a_2 \alpha^2 x^2 + \cdots$$
$$F(\beta x) = a_0 + a_1 \beta x + a_2 \beta^2 x^2 + \cdots$$

şi se ţine seamă de (5), se găseşte formula generală:

(6) $$a_0 + a_3 x^3 + a_6 x^6 + \cdots = \frac{F(x) + F(\alpha x) + F(\beta x)}{3}$$

În (6) se înlocuește x prin 1, $F(x)$ prin $(1+x)^n$, iar $a_0, a_1, \ldots$ prin coeficienții dezvoltării binomului $(1+x)^n$ și se găsește:

$$(7) \qquad S_0 = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \cdots = \frac{2^n + (1+\alpha)^n + (1+\beta)^n}{3}$$

La fel se găsește:

$$(8) \qquad S_1 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \cdots = \frac{2^n + \alpha^2(1+\alpha)^n + \beta^2(1+\beta)^n}{3}$$

$$(9) \qquad S_2 = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \cdots = \frac{2^n + \alpha(1+\alpha)^n + \beta(1+\beta)^n}{3}$$

Rezolvând trigonometric ecuațiunea:

$$x^3 - 1 = 0$$

găsim rădăcinile sale imaginare sub formele:

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\beta = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

și ducând aceste valori în (7), (8) și (9) se obțin formulele căutate:

$$S_0 = C_n^0 + C_n^3 + \cdots = \frac{2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}}{3}$$

$$S_1 = C_n^1 + C_n^4 + \cdots = \frac{2^n + 2\cos\frac{n-2}{3}\pi}{3}$$

$$S_2 = C_n^2 + C_n^5 + \cdots = \frac{2^n - 2\cos\frac{n-1}{3}\pi}{3}$$

Acum se poate trece cu ușurință la rezolvarea problemei pusă la V.

Vom observa mai întâi că ultimul termen al sumelor S_0, S_1, S_2 variază după valoarea lui n față de 3, așa cum se arată în tabelul următor:

	Când $n = 3p$	$n=3p+1$	$n=3p+2$
S_0	se termină cu C_n^n	C_n^{n-1}	C_n^{n-2}
S_1	„ „ „ C_n^{n-2}	C_n^n	C_n^{n-1}
S_2	„ „ „ C_n^{n-1}	C_n^{n-2}	C_n^n

Comparând sumele (1) cu S_0, S_1, S_2 se găsește ușor că față de diferitele valori ale lui n în raport cu 3, acele sume pot fi înlocuite prin valorile corespunzătoare ale tabelului următor:

Forma lui n	Valoarea lui $C_n^{n-1}+C_n^{n-4}+\cdots$	$C_n^{n-2}+C_n^{n-5}+\cdots$	$C_n^{n-3}+C_n^{n-6}+\cdots$
$3p$	S_2	S_1	$S_0 - C_n^0 - C_n^n$
$3p+1$	$S_0 - C_n^0$	S_2	$S_1 - C_n^n$
$3p+2$	S_1	$S_0 - C_n^0$	$S_2 - C_n^n$

În cazul $n = 3p$ avem evident:

$$S_2 = S_1$$

după cum am arătat la IV. Să vedem când putem avea:

$$S_1 = S_2 = S_0 - C_n^0 - C_n^n$$

sau:

$$\frac{2^n + 2\cos\frac{n-2}{3}\pi}{3} = \frac{2^n + 2\cos\frac{n}{3}\pi}{3} - 1 - 1$$

$$\cos\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{n-2}{3}\pi = 3$$

$$-2\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{n-1}{3}\pi = 3$$

$$\sin\frac{n-1}{3}\pi = -\sqrt{3} < -1$$

ceia ce arată că dacă $n = 3p$, atunci P nu se divide prin f.

Cazul $n = 3p+1$ conduce la:

$$S_0 - C_n^0 = S_2$$

de unde, după înlocuire și facerea tuturor calculelor:

$$\cos\frac{2n-1}{6}\pi = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{2n-1}{6}\pi = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

$2n-1 = 12k+1$ și $2n-1 = 12k-1$

ultima e neadmisibilă căci dă $n = 3p$, iar prima dă condiția:

$$\boxed{n = 6k + 1}.$$

Cazul $n = 3p + 2$ conduce la:

$$S_1 = S_0 - C_n^0$$

care, prin calcule analoage dă condiţia:

$$\boxed{n = 6k - 1}$$

aşa că se conclude.

Pentru ca polinomul P să se dividă prin f, sau pentru a avea relaţiunile (1), este necesar şi suficient ca n să fie de forma $6m \pm 1$.

VI. In concluzie, pr n metoda elementară expusă în acest articol s-au pus în evidenţă formulele (1) şi (2) pentru $n = 6m + 1$ şi s-au găsit valorile lui n pentru care au loc formulele (1).

Metoda de până aici se poate întrebuinţa şi pentru rezolvarea problemei reciproce în cazul formulelor (2), însă conducerea calculelor este mai greoaie.

Se pot găsi proprietăţi analoage, căutând, mai general, condiţiile de divizibil tate a polinomului P sau a unui polinom analog cu P, prin:

$$x^p + x^{n-1} + \cdots + 1.$$

CURBE PSEUDO-OMOGENE

de prof. IOAN V MATIEŞ

D-l profesor *V. Alaci*, studiază în *„R. M. T."* an III, Nr. 1, pag. 3 şi urm., o clasă de funcţiuni, înrudite cu funcţiunile omogene, pe care le numeşte funcţiuni *pseudo-omogene*.

Găsesc, la locul citat, că o funcţiune $f(x, y, z)$ este *pseudo-omogenă*, când există identitatea:

$$(1) \qquad f(t^\alpha x, t^\beta y, t^\gamma z) = t^m f(x, y, z)$$

α, β, γ, m fiind numere algebrice.

Un polinom:

$$P(x, y) = A_1 x^{a_1} y^{b_1} + A_2 x^{a_2} y^{b_2} + \cdots + A_n x^{a_n} y^{b_n},$$

sau scris în mod simbolic:

$$(2) \qquad P(x, y) = \sum_{i=1}^{n} A_i x^{a_i} y^{b_i},$$

este *pseudo-omogen*, dacă se pot găsi două numere α şi β, astfel ca:

$$(3) \qquad \frac{a_i}{\alpha} + \frac{b_i}{\beta} = m \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

In cele ce urmează, voiesc să arăt că toate curbele, definite de ecuaţia:

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_i x^{a_i} y^{b_i} = 0,$$

reprezintă curbe de gen parabolă şi trec prin origina axelor de coordonate.

Fac substituţia:

$$x = u^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{şi} \quad y = v^{\frac{1}{\beta}}$$

şi obţin:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i u^{p_i} v^{m-p_i} = 0,$$

unde am ţinut seama de (3) şi de:

$$p_i = \frac{a_i}{\alpha}$$

Presupunem $p_1 \geqq p_i$, împart ecuaţia cu $u^{p_1} v^{m-p}$ şi obţin:

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_i \left(\frac{v}{u}\right)^{p_1 - p_i} = 0.$$

[Dacă $p_1 < p_i$, atunci $q_1 \geqq q_i$ şi aş fi obţinut o ecuaţie în $\left(\frac{u}{v}\right)$ după ce aş fi făcut împărţirea cu $v^{q_i} u^{m-q_i}$].

Fie r_j rădăcinile ecuaţiei:

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_i (r)^{p_1 - p_i} = 0.$$

Ecuaţia (5) se mai poate scrie:

$$\prod_{j=1}^{p_1 - p_n} k\left(\frac{v}{u} - r_j\right) = 0$$

unde Π reprezintă produs depinzând de j.

Revin la variabilele x şi y şi obţin:

$$\prod_{j=1}^{p_1 - p_n} k\left(\frac{y^\beta}{x^\alpha} - r_j\right) = 0$$

sau:

$$y^\beta = r_j x^\alpha \quad (j = 1, \ldots \overline{p_1 - p_n})$$

$$(7) \qquad \therefore \qquad y = r_j x^{\frac{\alpha}{\beta}},$$

cari reprezintă curbe de gen parabolă şi trec toate prin origina axelor.

Notă. In cursul de Geom. Anal. a D-lui Prof. N. Abramescu, găsesc la pag. 70, că ecuaţia omogenă şi de gradul p în x şi y:

$$(8) \qquad f(x,y) = A_0 x^p + A_1 x^{p-1} y + \cdots$$
$$\cdots - A_{p-1} x y^{p-1} + A_p y^p = 0,$$

reprezintă un fascicol de p drepte ce trec prin origină:

$$(9) \qquad y = m_i x \qquad (i = 1, 2, \ldots p),$$

unde m_i sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$A_0 + A_1 m + \cdots + A_p m^p = 0$$

Cum însă ecuaţia *pseudo-omogenă* (4) este generalizarea ecuaţiei omogene (8), consider fascicolul de curbe de gen parabolă (7), ca o generalizare a fascicolului de drepte (9).

NOTE MATEMATICE

24. — *Asupra poligoanelor isoperimetrice*

In „*Bolletino di matematica*“ XXIX, pag. 81, sub titlul „Sui rettangoli isoperimetrici“ d-nii profesori *Giuseppe Levi* şi *Mariolevi* din Padova, stabilesc o teoremă relativă la diferenţa dintre aria unui pătrat şi a unui dreptunghiu isoperimetrice, şi dau două construcţiuni în legătură cu aceasta. In cele ce urmează vreau să generalizez proprietăţile aflate acolo:

Teoremă. Diferenţa între ariile a două poligoane isoperimetrice este echivalentă cu aria unui dreptunghiu, în care una din laturi este egală cu semi-perimetrul, iar celalaltă este egală cu diferenţa dintre apoteme.

Condiţia de isoperimetrie este $p = p'$, în care p şi p' sunt perimetrele celor două poligoane regulate; fie A şi A′ ariile respective şi α, α' apotemele corespunzătoare, în acest caz se poate scrie:

$$(a) \qquad A = \frac{p \cdot \alpha}{2} \quad \text{şi} \quad A' = \frac{p \cdot \alpha'}{2}$$

de unde:

$$(1) \qquad A - A' = \frac{p}{2}(\alpha - \alpha').$$

c. c. t. d.

Dacă se adună relaţiile (a):

$$(1') \qquad A + A' = \frac{p}{2}(\alpha + \alpha')$$

Impărţind (1) cu (1′):

$$(2) \qquad \frac{A - A'}{A + A'} = \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha + \alpha'}$$

Deci: Câtul dintre diferenţa ariilor a două poligoane isoperimetrice către suma ariilor, este egal cu câtul dintre diferenţa apotemelor către suma lor.

Din (2) se obţine imediat:

$$(3) \qquad A = A' \frac{\alpha}{\alpha'},$$

formulă ce permite calcularea uneia din arii cu ajutorul celeilalte arii şi a apotemelor respective.

Se mai pot găsi şi alte relaţii interesante.

MIHAIL BOTEZ

25. — *Asupra definiţiei convergenţei uniforme la seriile de funcţiuni.*

Fiind dat şirul de funcţiuni:

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

definite într'un interval (a, b), se zice că seria, notată simbolic:

$$(1') \qquad S(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

este convergentă, dacă şirul:

$$S_1(x) = f_1(x), \quad S_2(x) = f_1(x) + f_2(x), \ldots,$$
$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \ldots$$

este convergent în înterval; adică, la un ε ales arbitrar de mic, putem face să-i corespundă un număr $N(\varepsilon, x)$ aşa fel încât:

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \quad \text{pentru } n > N(\varepsilon, x).$$

Se mai adaogă, ca observaţie necesară, că numărul N depinde nu numai de ε ci şi de valoarea lui x în intervalul ales. Trebue observat că definiţia convergenţei seriei, nu este altceva decât definiţia unei operaţii de trecere la limită. Cele de mai sus ne spun deci că:

$$(1) \qquad S(x) = \lim_{n=\infty} S_n(x).$$

Obiectivul este acesta: găsirea condițiilor cari să ne înlesnească operația (1), scrisă simbolic sub forma (1'). Mărginindu-ne la funcțiile continui, scopul introducerii acestei noțiuni este transcris în relația operatorie (1). Noțiunea nu este deci nouă; și nici instrumentul de calcul, care este o trecere la limită prin intermediul parametrului n de care depinde funcțiunea $S_n(x)$. Astfel privită, definiția convergenței seriei de funcțiuni, păstrează toată generalitatea oricărei operații de forma (1). Dar, faptul că numărul N, întrodus mai sus, depinde nu numai de ε ci și de x, a dus la considerarea unei alte noțiuni, aceea de convergență uniformă. Să vedem în ce măsură această noțiune nouă decurge din considerațiile de mai sus.

Dacă $x_1, x_2, \ldots$ sunt diferite valori ale lui x, toate cuprinse în intervalul în care raționăm (a, b), vor corespunde acestor numere, la același ε, respectiv numerele $N_1(\varepsilon, x_1)$, $N_2(\varepsilon, x_2), \ldots$ Se zice că seria dată este uniform convergentă în (a, b), dacă se poate găsi un număr $N(\varepsilon)$, care depinde de ε, dar nu depinde de x, așa încât toate numerele $N_1(\varepsilon, x)$, $N_2(\varepsilon, x) \ldots$ să fie inferioare lui $N(\varepsilon)$. Atunci vom avea indeplinită condiția:

$$(I)| \qquad S_n(x) - S(x) | < \varepsilon \ , \quad \text{pentru } n > N(\varepsilon),$$

oricare ar fi x în intervalul (a, b).

Introducerea convergenței uniforme nu este cerută de operația (1). In relația (1) x este privit ca un parametru constant, și înainte și după operația de trecere la limită. Dacă vrem să referim operația (1) la un punct oarecare, fie x', este indiferent dacă această valoare o introducem în $S_n(x)$, sau în $S(x)$, — adică, înainte sau după efectuarea limitei. Până aci deci nimic nu ne determină să introducem numărul $N(\varepsilon)$, deoarece (1) ne indică o operație locală, punctuală, nu de ansamblu. Cu alte cuvinte, noțiunea de serie de funcțiuni, dacă ne mărginim numai la convergența simplă, nu definește prin $S(x)$ o nouă funcțiune, — existența acestei sume fiind în mod necesar atașată de fiecare dată (adică la un ε ales) unui punct determinat din intervalul (a, b).

Scopul introducerii noțiunii de convergență uniformă, este deci determinarea condițiilor în cari operația (1) poate deveni o operație de ansamblu; adică, suma $S(x)$ să fie efectiv o funcție de variabila x, în intervalul (a, b). De aci înainte se poate opera cu $S(x)$ ca o funcție, spunându-se că se operează cu suma nelimitată:

$$(2) \qquad f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

In definitiv procesul descris mai sus poate fi rezumat astfel: Fiind dată o sumă nelimitată (2) de funcțiuni, s'au căutat condițiile sub cari se poate opera cu această sumă nelimitată, așa cum se operează cu o funcțiune oarecare. Și această condiție a fost noua noțiune de convergență uniformă. Să precizăm. Când am spus că s'a căutat să se opereze cu sume nelimitate de funcțiuni (în speță continui) de forma (1), am înțeles o anumită operație, singura a cărei necesitate se simțea, anume: *integrarea*. Și trebue observat că dacă ne-am gândi la oricare altă operație alta decât integrarea, noțiunea de convergență uniformă, chiar dacă ar fi imaginată, n'ar prezenta, din punctul de vedere al calculului matematic, niciun interes concret. Problema s'a pus în felul următor: Fiind dată o sumă de funcțiuni de forma (2), să se găsească condițiile în cari această sumă să poată fi integrată termen cu termen, așa fel încât suma acestor integrale să fie integrala unei funcții, care să reprezinte în mod precis această sumă (2) și numai pe aceasta. Calculul se cunoaște. Se presupune că există funcțiunea $S(x)$ și se caută condiția care să ne permită să scriem egalitatea:

$$\int_{x_0}^{x} S(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f_1(x)\,dx + \int_{x_0}^{x} f_2(x)\,dx + \cdots$$
$$\cdots + \int_{x_0}^{x} f_n(x)\,dx + \cdots,$$

x_0 și x fiind două valori în intervalul (a, b). Pentru aceasta se scrie:

$$\int_{x_0}^{x} S(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} S_n(x)\,dx + \int_{x_0}^{x} R_n(x)\,dx \ ,$$

unde $R_n(x)$ este *restul* seriei (1'). Fără restricțiile impuse de convergența uniformă, se vede că din acest moment nu se poate merge mai departe. De îndată ce scriem condiția de uniformitate, sub forma:

$$| R_n(x) | < \varepsilon, \quad \text{pentru } n > N(\varepsilon),$$

calculele pot fi duse cu succes până la sfârșit. Nu le mai transcriem, fiind prea cunoscute.

In ultimă analiză deci, convergența uniformă exprimă condiția necesară pentru înglobarea seriilor de funcțiuni în noțiunea generală de *funcțiune*.

N. O. ZAHARIA

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXIX, No. 5, Ianuarie 1934. † *Paul Painlevé*, de *Gh. Ţiţeica*. Cărţi vechi de matematică, de *I. Ionescu*. Asupra rezolvării în numere întregi a unei ecuaţii omogene de gradul al 2-lea cu n necunoscute, de *Ioan B. Florescu*.

2. *Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences*. Tome 35 din 1933, Bucureşti. Volume de Jubilé de MM. *D. Pompeiu* et *Gh. Ţiţeica* Sur le trapèze parabolique de M. *D. Pompeiu*, par *E. Abason*. Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme et applications à la détermination des courbes de convergence de certaines séries de polynômes, par *N. Abramesco* Sur le principe de *Legendre*, par *A. Angelesco*. Sur une classe nouvelle de noyaux pour une équation *Fredholm*, par *Th. Anghelutza*. Über rationale Normalkurven, von *D. Barbelian*. La logique de *M. Brouwer*. Etat de la question, par *M. Barzin* et *A. Errera*. Le théorème des accroicsements finis et les fonctions holomorphes, par *N. Botea*. Sur les systèmes orthogonaux du plan et de l'espace à trois dimensions, par *Georges Bouligand*. La cinématique newtonienne et les espaces à connexion euclidienne, par *Elie Cartan*. Quelques propriétés générale des fonctions continues, par *N. Ciorănescu*. L'additivité métrlque vectorielle des ensembles et les discontinuités tangentielles sur les courbes rectifiables, par *A. Denjoy*. Courbes loxodromiques sur une surface, par *C. Drâmbă*. Sur la propriété de M. *Pompeiu*, concernant les intégrales des fonctions à deux variables réelles, par *A. Froda*. Note sur une inégalité de *Cauchy*, par *S. A. Gheorghiu*. Equations différentielles et équations aux différences finies, par *M. Ghermanesco*. Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes, par *A. Ghika*. Le théorème de *Fuchs*, par *D. V. Ionesco*. Sur un théorème de limite, par *G. Mihoc*. Sur un théorème de *M. Pompeiu*, par *P. Montel* Sur un théorème de *M. Tzitzeica* par *P. Montel*. Sur l'équation de *Laplace*, par *M. Nicolesco*. Sur la translation analytique et ses invariants, par *O. Onicescu*. Sur certaines congruences spéciales, par *Al. Pantazi*. Une interprétation ondulatoire pour la „Condition de la fréquence" quantique de *Bohr*, par *I. Placinţeanu*. Sur une extension des théorèmes de *M. M. Schur* et *Polya*, par *P. Sergescu*. Sur une surface universelle pour les fonctions de *Baire*, par *W. Sierpinski*. Sur les transformations continues des espaces topologiques, par *S. Stoïlow*. Sur certains nombres principaux, par *G. Sudan*. Sur la cinématique du corps solide dans l'espace euclidien à n dimensions, par *L. Teodoriu*. Remarques sur le problème de *Cauchy* pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles, par *N. Théodoresco*. Sur l'équilibre d'un solide rigide appuyé sur une surface, par *V. Vâlcovici*. Sur les systèmes intégrés d'un système de *Pfaff*, par *G. Vranceanu*.

3. *Boletin Matematico*, Ano VI, No. 8, Octubre de 1933, Buenos-Aires. O teoremă recíprică a teoremei lui *Desarques-Sturm* şi unele aplicaţiuni, de *C. Coşniţă*.

4. *Boletin Matematico*, Ano I, No. 9 Supliment informativ.

5. *Revista Matematica a elevilor craioveni*, Anul II, No. 7—8. Asupra unei probleme de geometrie, de *I. Prodoescu*.

6. *Ing. C. Teodorescu*. Să întrebuinţăm nisip normal german sau român? (Extras din Revista „Ciment şi Beton" No. 1, Ianuarie 1934, Bucureşti).

7. *Ing. Ştefan Nadaşan*. Beitrag zur Untersuchung des Zusammenhanges zwischen Brinell- und Shore-Härte bei Gusseisen. (Extras din „Bulletin Scientifique" de l'école Polytechnique de Timişoara, vol. V, fasc. 1—2, în curs de apariţie.)

8. *M. Chermanesco*. Sur les équations aux différences finies. (Extrait des Comptes rendus des sciences de l'Académie des Sciences, t. 197, p. 805, séance du 16 Octobre 1933.)

9. *M. Ghermanesco*. Sur les équations finies à plusieurs variables. (Extrait du Bulletin de la classe des Science. Académie royale de Belgique, t. XIX, No. 10—11, 1933.)

10. *M. Ghermanesco*. Sur les équations aux différences finies à plusieurs variables. (Extrait du Bulletin de la Classe des Sciences, t. XIX, No. 10—11, 1933, Académie royale de Belgiques).

11. *M. Ghermanesco*. Sur l'analyticité des solutions d'une certaine équation aux dérivées partielles, non linéaire. (Extratto, dal V. XVII. 1933, Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei).

12. *M. Ghermanesco*. Sur l'équation fonctionelle linéaire d'ordre p à coefficients constants. (Bulletin de la Classe des Sciences, V. XIX, Académie royale de Belgique).

13. *M. Ghermanesco*. Sur une équation aux dérivées partielles du quatriéme ordre. (Extrait du „Buletinul Facultăţii de Ştiinţe din Cernăuţi, Vol. V, 1932.)

14. *M. Ghermanesco*. Equations différentielles et équations aux différences finies. (Extrait du Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences, t. XXXV.)

PROBLEME REZOLVATE

1178. — *Intre două persoane s'a încheiat un împrumut de A lei. Ştiind că numărul B e mediu proporţional între procent şi numărul zilelor pentru care s'a încheiat împrumutul, se cere dobânda acestui împrumut. Să se trateze în cazul particular* $A = 728910$ lei, $B = 20$.

I. V. MATIES

Fie D dobânda capitalului A, împrumat cu procentul P pe timp T de zile. Dobânda D este dată după cum ştim de formula:

$$(1) \qquad D = \frac{A \times P \times T}{36000}$$

Din enunţul problemei rezultă că numărul cunoscut B, satisface relaţia:

$$B^2 = P \times T.$$

In virtutea acestei relaţii, formula (1) devine:

$$(2) \qquad D = \frac{A \times B^2}{36000}.$$

Aceasta e dobânda cerută, căci A şi B sunt cunoscuţi.

Cazul particular, $A = 728910$, $B = 20$.

In acest caz formula (2) devine:

$$D = \frac{728910 \times 400}{36000} = \frac{72891}{9} = 8099 \text{ lei.}$$

Observare. Autorul problemei a mai considerat două cazuri:

1°. Suma A e capitalul definitiv în dobândă simplă decursivă, în care caz, avem formula:

$$D = \frac{A \times P \times T}{36000 + P \times T} = \frac{A\,B^2}{36000 + B^2}$$

(*N. Georgescu*, Algebra Financiară, pag. 7).

2°. Capitalul A se împrumută pe baza unei cambii și în acest caz trebuie calculată dobânda anticipativă.

Avem:

$$D = \frac{A \times P \times T}{36000 - P \times T} = \frac{A\,B^2}{36000 - B^2}$$

(*N. Georgescu*, Algebra Financiară, pag. 9).

Au soluționat problema numai în cazul tratat mai sus d-rele: *Benedek Evi* (lic. Sibiu), *Hetca Elenora* (lic. Beiuș) și d-nii: *Amărăștеanu Marcel* (lic. Buzești, Craiova), *Arbter Emil* (lic. Beiuș), *Arhire Vasile* (lic Milit., Cernăuți), *Boian Ioan* (Țânțăreni), *Budeanu C-tin* (București), *Caraman C-tin* (lic. Milit., Cernăuți), *Ceausescu Vasile* (Călărași), *Chiriac C-tin* (lic. Milit, Iași), *Chiriță Mihail* (lic. Milit., Craiova), *Ciancilian A.* (Balcic), *Cismigiu Marius* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit., Craiova), *Cojocaru M*, (lic. Milit, Craiova), *Coșovliu Ștefan* (lic. Milit., Chișinău), *Coșereanu I. Petre* (lic. Milit., Cernăuți), *Crisan Iacob* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Deceanu Gheorghe* (lic. Milit, Tg.-Mureș), *Dumitrescu P. Alexandru* (lic. Slatina), *Fenichi Alexandru* (lic. Milit, Tg-Mureș), *Godeanu Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Grumăzescu M.* (lic. Internat. Iași), *Ionescu-Argetoia C. Emil* (student), *Ionescu D-tru* (lic. Milit., N. Filipescu), *Jora V.* (lic. Milit., Cernăuți), *Lățea P. C-tin*, *Lupescu Gh. Corneliu* (lic. Roman), *Marteș V. Grigore*, *Marnea Desideriu* (lic (Beiuș), *Mazilu Panait* (lic. Internat, Iași), *Mecu Mihail* (lic. Cantemir, București), *Mehedinți D. D-tru* (lic. Milit., Tg. Mureș), *Mereuță Emilian*, *Metea S. Virgil* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Mihalcea Nicolae* (lic. Beiuș), *Milea E.* (Sub-Lt.), *Milu Nicolae* (lic. Milit., Chișinău), *Murgu M.* (lic. Beiuș), *Negrea A. Leonte-Mircea* (Brăila), *Nițoiu V. Nicolae* (lic. Milit, Chișinău), *Nuțu Mircea* (lic. Milit., Iași), *Papazian Eduard* (lic. Eminescu, București), *Pascu Zeno* (Șc Polit., Timișioara), *Păcuraru Pavel* (lic. Milit, Tg-Mureș), *Petrescu A. Anastasie* (Craiova), *Petrescu D. Ioan* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Popa Nicolaie*, *Porecki B.* (lic. Kogălniceanu, Iași). *Porumbescu D.* (Tg-Ocna), *Predoescu I. Marin* (lic. Buzești, Craiova), *Predoescu Traian* (lic. Milit., Craiova), *Procopiescu Mihai* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Sandovici Vasile* (lic. Internat, Iași), *Săndulescu I. Ioan* (Șc. Polit, Timișoara), *Scărlătescu I.* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Secăroiu D-tru* (Sub-Lt.), *Segărceanu M. Marin* (lic. Milit., Craiova), *Șerbu D. C-tin* (lic. Milit, Cernăuți), *Solovici Anatolie* (lic. Milit., Chișinău), *Stănescu Iancu* (lic. Milit., Cernăuți), *Stoica D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureș), *Șușala Gh.* (lic. Milit., Chișinău), *Tica Petre Marinel*, *Tutunaru D-tru* (Șc. Milit. de Artilerie), *Țarălungă D-tru* (lic. Milit., Tg-Mureș) și *Vancai Ioan* (conductur technic).

1179. — *Două trăsuri pleacă în același timp din localitățile A și B în sens contrar. Ele se întâlnesc după 48 minute de mers, când prima a făcut 2400 metri mai mult de cât a doua. Ce distanță este între cele două localități și ce viteză a avut fiecare trăsură, dacă trăsura din A ajunge în B cu 28 minute înainte ca trăsura din B să ajungă în A.*

I. DUMITRIU-DADA

Fie v_1 și v_2 vitezele în metri pe minută a celor două trăsuri ce pleacă respectiv din localitățile A și B.

Conform enunțului avem:

$$48\,v_1 = 48\,v_2 + 2400, \tag{1}$$

relație care scrie că drumul parcurs de prima trăsura în 48 minute, este mai lung cu 2400 metri de cât drumul parcurs de a doua trăsură în același timp.

Deasemenea avem:

$$\frac{48\,v_2}{v_1} = \frac{48\,v_1}{v_2} - 28, \tag{2}$$

relație care scrie, că timpul cât ia trebuit trăsurei din A ca să parcurgă restul drumului după întâlnire, până în B adică $48\,v_2$, este cu 28 minute mai scurt de cât timpul ce ia trebuit trăsurei a doua după întâlnire, ca să ajungă în B.

Ecuațiele (1) și (2) formează impreună sistemul de ecuații a problemei și care simplificat devine:

$$\left\{\begin{array}{l} v_1 - v_2 = 50 \\ 12\,(v_1^2 - v_2^2) = 7\,v_1\,v_2 \end{array}\right. \tag{3}$$

Ecuația 2-a, ținând seamă de prima devine:

$$600\,(v_1 + v_2) = 7\,v_1\,v_2$$

Inlocuind aci pe v_1 cu valoare sa scoasă din prima ecuație a sistemului (3), avem:

$$600\,(50 + v_2 + v_2) = 7\,v_2\,(50 + v_2)$$

$$7\,v_2^2 - 850\,v_2 - 30000 = 0. \qquad ***$$

Rezolvind această ecuație de gradul al 2-lea, găsim:

$$v_2 = \frac{425 \pm \sqrt{180625 + 210000}}{7} =$$

$$\frac{425 \pm \sqrt{390625}}{7} = \frac{425 \pm 625}{7}.$$

Deci soluția convenabilă problemei, este:

$$v_2 = \frac{1050}{7} = 150\text{ m.}$$

și atunci rezultă din prima ecuație din (3), că $v_1 = 200$ m.

Distanța D între cele două localități este:

$$D = 48\,(v_1 + v_2) = 48 \times 350 = 16800\text{ m.},$$

iar vitezele celor două trăsuri plecate din A şi B sunt respectiv, după cum am găsit:

$$v_1 = 200 \text{ m.}, \qquad v_2 = 150 \text{ m.}$$

Soluţii date de d-nii: *Amăresteanu F. M.* (lic. Buzeşti, Craiova), *Arhire D. Vasile* (lic. Milit., Cernăuţi), *Boian Ioan* (Că ărăşi), *Budeanu C-tin* (Bucureşti), *Calcan Simon*, *Caraman C-tin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Ceauşescu Vasile* (Călăraşi), *Chiriac C-tin* (lic. Milit., Iaşi), *Coandă I. Virgil* (lic. Milit, Craiova), *Cosman A.* (Şc. Polit., Timişoara), *Coşereanu I Petre* (lic. Milit., Cernăuţi), *Caişan T. Iacob* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Deceanu Gheorghe* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Dumitrescu P. Alexandru* (lic. Slatina), *Godeanu Ig. Vasile* (lic. Milit., Craiova), *Grumăzescu Mircea* (lic. Internat, Iaşi), *Ionescu-Argetoia C. Emil* (student, Bucureşti) *Ionescu C. Ştefan* (lic. Milit., N. Filipescu), *Iora V.* (lic. Milit, Cernăuţi), *Lebădă D.* (lic Milit., Iaşi), *Marteş V. Grigore*, *Mazilu Panait* (lic. Internat, Iaşi), *Mereuţă Emilian*, *Milea G. E.* (Sub-Lt.), *Milu I. Nicolae* (lic. Milit., Chişinău). *Mitache Anton* (lic. Milit., Chişinău), *Pascu P. Zeno* (Şc. Polit., Timişoara), *Popa Nicolae*, *Porumbescu D.*, *Preda C. C-tin* (lic. Milit., Tg-Mureş), *Predoescu Traian* (lic. Milit., Craiova), *Rusu Gheorghe* (lic. Milit, Iaşi), *Săndulescu Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Secăroiu D-tru* (Şc. Milit, de Artilerie), *Sagârceanu I. Marin* (lic. Milit., Craiova), *Şerbu D. C-tin* (lic. Milit., Cernăuţi), *Şuşală Gh.* (lic. Milit, Chişinău), *Stănescu Iancu* (lic. Milit., Cernăuţi), *Tica P. Marinel-Gal* şi *Vancai Ioan* (conductor technic).

PROBLEME PROPUSE

1264. — Un bazin poate fi umplut prin trei robinete. Primul l-ar umplea singur în 2^m, $12^{sec.}$; al doilea în 3^m, $40^{sec.}$ şi al treilea în 4^m, $35^{sec.}$. In acelaşi timp, apa din bazin se poate scurge prin două robinete aşezate la fundul bazinului. Primul ar goli singur bazinul în 2^m, $30^{sec.}$, iar al doilea în 4 m. Se deschid toate robinetele de odată. După 1^m, $20^{sec.}$, ultimul robinet de umplere se înfundă. După încă 1^m, $15^{sec.}$, se înfundă al doilea robinet de umplere şi al doilea robinet de scurgere. Să se afle în cât timp se va umplea bazinul întreg.

VIRGIL CLAUDIAN

1265. — Să se găsească numărul în baza zece, care în baza opt are patru cifre astfel că: cifra doua este egală cu ultima, suma patratelor cifrelor 82, inversul numărului format de primele două cifre întrece cu 2 inversul numărului format de ultimele două, şi produsul dintre prima şi a treia cifră este 3.

ŞTEFAN MUSTA

1266. — Se dau două cercuri O şi O′ care se tae în A şi B. Dacă o secantă oarecare tae cercurile la rând în C, D, E şi F, să se dovedească că avem:

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle EBF$$

GH. VASILIU

1267. — Fie A O B un triunghiu dreptunghic în O. Pe catetele O A, O B şi în acelaşi senz, se iau lungimele A A′, B B′ egale între ele şi variabile. Fie A″ simetricul lui A′ faţă de A. Se ştie că perpendiculara pe A′ B′ în mijlocul său trece printr'un punct fix F. Să se se arate că şi perpendiculara pe mijlocul lui A″ B′ trece printr'un punct fix F′ şi că mijlocul lui F F′ este de asemenea fix.

COL. GH BUICLIU

1268. — Patrulaterul inscriptibil P este înscris într'un paralelogram ale cărui laturi sunt perpendiculare pe diagonalele sale.

1°. Perpendicularele coborâte din vărfurile paralelogramului pe laturile corespunzătoare ale patrulaterului P, sunt concurente.

2° Punctul de întâlnire este simetricul punctului de întâlnire al diagonalelor patrulaterului P în raport cu centrul cercului său circumscris.

CONSTANTIN IONESCU-BUJOR

1269. — Să se determine o ecuaţie de gradul al doilea cu rădăcinele x_1 şi x_2, ştiind că:

$$x_1 - x_2 = a, \qquad x_1^2 - x_2^2 = b.$$

Să se studieze natura şi semnul rădăcinelor.

I. V. MATIES

1270. — Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \dfrac{x(2x+1)(y+1)}{(x+1)^2} = (a-1)y + a \\ \dfrac{y(2y+1)(z+1)}{(y+1)^2} = (b-1)z + b \\ \dfrac{z(2z+1)(x+1)}{(z+1)^2} = (c-1)x + c \end{cases}$$

ION MARGINEANU

1271. — Se dă triunghiul dreptunghic A B C şi se ia pe catetele A B şi A C segmentele A D = A E = 1.

Se duce A F astfel ca:

$$\sphericalangle BAF = \frac{\sphericalangle ABC}{2}.$$

Din punctul F care se găseşte pe E D, se duce perpendiculara F G = d, pe A B.

Să se stabilească relaţiunea:

$$b = (a + b + c) \cdot d,$$

a, b, c fiind laturile triunghiului dat.

V. ALACI

TABLA DE MATERII

I. ARTICOLE.

a) Aritmetică

		Pag.
I. V. Mătieș	Câteva teoreme în legătură cu terminațiunea puterilor numerelor întregi	49

b) Algebră

V. Alaci	Expresiunile restului și câtului împărțirei a două polinoame	25
Gh. Leobeu Vasiliu	Eroarea mediei aritmetice . .	50
C. Ivănescu	Asupra unor însumări . . .	63
Col. Gh. Buicliu	O problemă de divizibilitate	97
V. Alaci	O clasă de identități algebrice	121
Col. Gh. Buicliu	Formule de Analiză combinătoare	133

c) Geometrie

D. V. Ionescu	O teoremă de geometrie elementară	13
V. Thébault	Sur un théorème de géométrie	37
N. G. Botea	Teoreme în legătură cu două triunghiuri și două poligoane	37
V. Thébault	Sur la distance du centre de gravité au point de *Lemoine* d'un triaugle	73
C. Coșniță	Alte teoreme în legătură cu două triunghiuri sau două poligoane	74
V. Thébault	Sur un théorème de Schröter	85
C. Ionescu Bujor	Asupra unor triunghiuri podare și antipodare	87

d) Geometrie analitică

C. Coșniță	O teoremă relativă la conice .	3
I. V. Mătieș	Curbe pseudo-omogene . .	136

e) Astronomie

A. Crișan	Exerciții matematice de astronomie pentru liceu . . .	14
Sp. Ghițescu	O nouă teorie a întinderii universului	98

f) Istoria matematicelor

N. O. Zaharia	Două comemorări: *Leonard Euler* și *Adrien-Marie Legendre*	61
P. Sergescu	Histoire des sciences mathématiques et physiques en Roumanie 111,	123

g) Diverse

* * *	Lista membrilor comitetului Revistei 1,	2
P. V. Cazanacli	Probleme amuzante 7,	20
P. V. Cazanacli	Anecdote și glume matematice	68
* * *	Rectificarea problemei 863 vol. IX. pag. 108	84
* * *	Sărbătorirea d-lor profesori *D. Pompeiu G. Țițeica* . .	109

II. NOTE MATEMATICE

			Pag.
1.	**Col. Gh. Buicliu**	*Simson* și *Simpson*	6
2.	**Ing. C. Stan**	O clasă de inegalități . . .	6
3.	**P. V. Cazanacli**	Semnele întrebuințate în trigonometrie	18
4.	**V. Mioc**	Suprafața laterală și volumul trunchiului de con . . .	19
5.	**Sp. Ghițescu**	Particularitățile atmosferei lui Venus	31
6.	**C. Ivănescu**	Asupra problemei 1048 . .	32
7.	**I. V. Mătieș**	Generalizarea problemei 1048	42
8.	**C. Ionescu Bujor**	Asupra problemei 1086 . .	43
9.	**M. I. Predoescu**	Asupra unor determinanți .	53
10.	**C. Budeanu**	Construcție grafică	66
11.	**I V. Mătieș**	Asupra identităților lui *Simpson*	66
12.	**V. Alaci**	Asupra problemei 4086 din Gazeta Matematică . . .	77
13.	**N. O. Zaharia**	Asupra unui proces de abstractizare	79
14.	* * *	*Jean le Rond d'Alembert* . .	88
15.	**Col. Gh. Buicliu**	Numărul 142857	89
16.	**N. O. Zaharia**	Despre cazuri particulare și generalizări	90
17.	**M. V. Thébault**	Formules relatives au triangle	100
18.	**Col. Gh. Buicliu**	Rectificarea soluției problemei 889	101
19.	**M. G.**	Asupra problemei 813 . . .	102
20.	**P. V. Cazanacli**	O problemă veche	102
21.	**P. V. Cazanacli**	Semnele întrebuințate în teoria combinărilor	115
22.	**V. Thébault**	Formules relatives au triangle	127
23.	**Col. Gh. Buicliu**	Asupra problemei 1137 . .	127
24.	**M. Botez**	Asupra poligoanelor isoperimetrice	137
25.	**N. O. Zaharia**	Asupra definiției convergenței uniforme la seriile de funcțiuni	137

III. BIBLIOGRAFII

N. Abramescu	Sur les courbes de convergence des séries de polynômes à une variable complexe et leur application a la determination des fonctions holomorphes dans des domaines donnés 128
Boletin Matematico	. . . . 7, 21, 33, 80, 104, 116
Boletin Matematico elemental	. 7, 21, 44, 54, 91, 117
N. G. Botea	Sur une théorème de *M. Pompeiu* 7
N. G. Botea	Sur quelques équations aux dérivées partielles . . . 7
N. G. Botea	Proprietăți ale triunghiului . 80
N. G. Botea	Deux théorèmes sur le triangle 80
N. G. Botea	Sur les fonctions holomorphes 80
N. G. Botea	Sur la configuration formée par deux triangle et deux points 80
Botez St. M.	Les surfaces conoïde . . . 91
Buletinul	Ședințelor dela Societatea Română de Științe 33
Buletinul	„Societății de Matematici" a liceului „Tasse Dumitrescu" Mizil 33

		Pag.
Bulletin Mathématique	de la Société Roumanie des Sciences	139
Bulletin de Mathématique	et de Physique pure et appliquées de l'école Politechnique *Roi Carol II* . .	44
Bulletin Scientifique	de l'école Politechnique de Timişoara	21
Eurique Butty	Introduction a la Fisica Matematica	33
V. Catona şi D. Deheleanu	Incercări asupra sudării cu arcul electric	33
P. V. Cazanacli Evariste Galois	. . . . .	7
Chestiuni de examen	secţia Matematică a Facultăţii Ştiinţe din Cluj	117
Congresul internaţional	al Matematicienilor . . .	33
Gazeta Matematică	8, 21, 33, 44, 54, 80, 91, 104, 116,	128
M. Ghermanesco	Sur les équations aux différences finies	139
M. Ghermanesco	Sur les équations finies à plusieurs variables	139
M. Ghermanesco	Sur les équations aux différences finies à plusieurs variables	139
M. Ghermanesco	Sur l'analyticité des solutions d'une certaine équation aux dérivées partielles, non linéaire	139
M. Ghermanesco	Sur l'équation fonctionelle linéaire d'ordre *p* à coefficients constants	139
M. Ghermanesco	Sur une équation aux dérivées partielle du quatrieème ordre	139
M. Ghermanesco	Equations différentielles et équations aux diférences finies	139
Licurici,	revista Societăţii culturale *„B. P. Haşdeu"* liceul de băeţi No. 1 Chişineu	21
Mathematica	. . . . .	44
Ştefan Nadasan	Beitrag zur Untersuchung des Zusammenhanges zwischen Brinell- und Shore-Härte bei Gusseisen	139
I. T. Popovici	Thèses, présentées à la Faculté des Sciences de Paris . .	68
Rodolphe Racliş	Trois théorèmes sur la série de *Taylor*	80
Rodolphe Racliş	Le terme Reste de la série de *Taylor* généralisée	80
Revista Matematică	a elevilor craiovani 7, 21, 33,	44
Petre Sergescu	Istoria calculului numeric . .	7
Petre Sergescu	O schiţă de istorie a Ştiinţelor Matematice	7
Petre Sergescu	Spiritul cel nou în legea învăţământului superior	7
Petre Sergescu	Quelques propriétés des polynômes	7
Petre Sergescu	Quelques points de la théorie des équations algébriques	21
Tachella Giuseppe	Fondamenti di Geometria Analitica a due ed a tre dimensioni dei Luoghi lineari „Composti"	91
C. Teodorescu	Să întrebuinţăm nisip normal german sau român? . . .	139
Trabajos	del Seminario Matematico . .	33
V. Vâlcovici	Sur le mouvement d'un solid rigid	33
V. Vâlcovici	Un examen de bacalaureat din sesiunea Septembrie 1932	33
N. O. Zaharia	O carte preţioasă	128

IV. CHESTIUNI DE EXAMEN

		Pag.
Şcoala Politechnică Timişoara.	Examenul de Matematici generale	80
Şcoala Politechnică Timişoara.	Examenul de întrare în anul pregătitor	103

V. PROBLEME REZOLVATE ŞI PROPUSE

Numărul din coloana 1) arată numărul problemei propuse, cel din coloana 2) pagina la care a fost propusă, cel din coloana 3) volumul în care a fost propusă şi cel din coloana 4) pagina la care a fost rezolvată în volumul XIII. Problemelor care nu au nimic publicat în coloana 4) nu li-sa publicat soluţia.

1).	2).	3).	4).
42	94	I	
50	110	„	
54	126	„	
69	142	„	
88	174	„	
91	187	„	
92	187	„	
98	187	„	
99	187	„	
100	14	II.	
109	14	„	
110	14	„	
114	30	„	
121	30	„	
124	46	„	
140	62	„	
141	62	„	
154	78	„	
164	94	„	
165	94	„	
174	110	„	
175	110	„	
176	126	„	
178	126	„	
184	126	„	
185	126	„	
186	142	„	
191	142	„	
194	142	„	
195	142	„	
199	158	„	
206	174	„	
217	185	„	
230	14	III.	
235	30	„	
243	46	„	
244	46	„	
248	46	„	
253	62	„	
255	62	„	
259	62	„	
264	78	„	
268	78	„	

1).	2).	3).	4).
275	94	III.	
289	126	„	
291	126	„	
296	142	„	
299	142	„	
310	174	„	
313	174	„	
315	174	„	
317	174	„	
319	185	„	
334	14	IV.	
335	14	„	
336	14	„	
343	30	„	
344	30	„	
345	30	„	
347	46	„	
357	62	„	
359	62	„	
361	78	„	
369	94	„	
376	94	„	
382	110	„	
390	126	„	
393	126	„	
401	142	„	
406	158	„	
407	158	„	
411	158	„	
414	174	„	
418	174	„	
423	191	„	
424	191	„	
435	13	V.	
440	30	„	
444	30	„	
445	46	„	
450	46	„	
458	62	„	
460	62	„	
462	62	„	
478	94	„	
479	94	„	

1).	2).	3).	4)
481	110	V.	
489	126	„	
507	158	„	
516	174	„	
519	190	„	
524	190	„	
527	14	VI.	
528	14	„	
531	14	„	
	122	IX.	
535	30	VI.	
541	46	„	
542	46	„	
543	46	„	
548	46	„	
550	62	„	
557	78	„	
558	78	„	
562	78	„	
569	94	„	
606	174	„	
608	174	„	
612	190	„	
613	190	„	
616	190	„	
622	22	VII.	
628	38	„	
	112	„	
634	54	„	
635	54	„	
639	54	„	
646	70	„	
649	86	„	
654	102	„	
656	102	„	
657	102	„	
658	102	„	
667	134	„	
686	134	„	
695	190	„	
753	110	VIII.	7
762	126	„	
766	126	„	
769	142	„	
772	142	„	
782	174	„	
794	190	„	
813	36	IX.	21
823	48	„	
832	60	„	
847	84	„	
851	96	„	
853	96	„	
858	108	„	
860	108	„	

1).	2).	3).	4).
863	108	IX.	
	84	XIII.	
867	122	IX.	
879	144	„	
882	144	„	
889	12	X.	91
898	24	„	68
908	36	„	
916	48	„	
917	48	„	81
923	60	„	
924	60	„	
929	72	„	
938	84	„	
939	84	„	
951	107	„	
953	107	„	
954	108	„	
956	108	„	
961	120	„	
971	132	„	
971 bis	132	„	
974	138	„	
979	138	„	
982	12	XI.	
984	12	„	
989	24	„	55
992	24	„	
993	24	„	
1000	36	„	
1001	36	„	
1002	36	„	
1004	36	„	
1005	48	„	81
1008	48	„	
1009	48	„	
1012	48	„	
1017	60	„	
1018	60	„	
1023	72	„	
1027	72	„	
1033	84	„	44
1035	84	„	
1036	84	„	
1037	84	„	
1043	96	„	
1044	96	„	
1046	96	„	
1052	108	„	
1059	120	„	
1060	120	„	
1067	132	„	
1068	132	„	
1076	138	„	70
1077	138	„	

1).	2).	3).	4).
1079	12	XII	
1081	12	„	57
1083	12	„	45
1084	12	„	92
1085	12	„	
1092	24	„	
1093	24	„	
1098	36	„	57
1099	36	„	93
1100	36	„	93
1101	36	„	82
	48	„	
1103	36	„	
1106	48	„	
1107	48	„	
1108	48	„	
1110	48	„	58
1113	60	„	
1114	60	„	
1115	60	„	
1116	60	„	
1117	60	„	11
1118	60	„	23
1119	60	„	
1120	60	„	23
1121	72	„	46
1122	72	„	46
1123	72	„	94
1124	72	„	33
1125	72	„	
1126	72	„	
1127	72	„	70
1128	72	„	71
1129	84	„	
1130	84	„	59
1131	84	„	59
1132	84	„	34
1133	84	„	
1134	84	„	
1135	84	„	35
1136	84	„	83
1137	96	„	95
1138	96	„	129
1139	96	„	104
1140	96	„	
1141	96	„	
1142	96	„	
1143	96	„	105
1144	96	„	
1145	108	„	
1146	108	„	
1147	108	„	117
	120	„	
1148	108	„	105
1149	108	„	

1).	2).	3).	4).
1150	108	XII.	
1151	108	„	83
1152	108	„	83
1153	120	„	
1154	120	„	106
1155	120	„	107
1156	120	„	
1157	120	„	
1158	120	„	
1159	120	„	107
1160	120	„	
1161	132	„	
1162	132	„	117
1163	132	„	
1164	132	„	
1165	132	„	
1166	132	„	
1167	132	„	
1168	132	„	
1169	138	„	118
1170	138	„	
1171	138	„	
1172	138	„	119
1173	138	„	
1174	138	„	
1175	138	„	
1176	138	„	130
1177	12	XIII.	131
1178	12	„	139
1179	12	„	140
1180	12	„	
1181	12	„	
1182	12	„	
1183	12	„	
1184	12	„	
1185	24	„	
1186	24	„	
1187	24	„	
1188	24	„	
1189	24	„	
1190	24	„	
1191	24	„	
1192	24	„	
1193	36	„	
1194	36	„	
1195	36	„	
1196	36	„	
1197	36	„	
1198	36	„	
1199	36	„	
1200	36	„	
1201	48	„	
1202	48	„	
1203	48	„	
1204	48	„	

1).	2).	3).	4).
1205 .	48 .	XIII	
1206 .	48 .	„	
1207 .	48 .	„	
1208 .	48 .	„	
1209 .	60 .	„	
1210 .	60 .	„	
1211 .	60 .	„	
1212 .	60 .	„	
1213 .	60 .	„	
1214 .	60 .	„	
1215 .	60 .	„	
1216 .	60 .	„	
1217 .	72 .	„	
1218 .	72 .	„	
1219 .	72 .	„	
1220 .	72 .	„	
1221 .	72 .	„	
1222 .	72 .	„	

1).	2).	3).	4).
1223 .	72 .	XIII	
1224 .	72 .	„	
1225 .	84 .	„	
1226 .	84 .	„	
1227 .	84 .	„	
1228 .	84 .	„	
1229 .	84 .	„	
1230 .	84 .	„	
1231 .	84 .	„	
1232 .	96 .	„	
1233 .	96 .	„	
1234 .	96 .	„	
1235 .	96 .	„	
1236 .	96 .	„	
1237 .	96 .	„	
1238 .	96 .	„	
1239 .	96 .	„	
1240 .	108 .	„	

1).	2).	3).	4).
1241 .	108 .	XIII	
1242 .	108 .	„	
1243 .	108 .	„	
1244 .	108 .	„	
1245 .	108 .	„	
1246 .	108 .	„	
1247 .	108 .	„	
1248 .	120 .	„	
1249 .	120 .	„	
1250 .	120 .	„	
1251 .	120 .	„	
1252 .	120 .	„	
1253 .	120 .	„	
1254 .	120 .	„	
1255 .	120 .	„	
1256 .	132 .	„	
1257 .	132 .	„	
1258 .	132 .	„	

1).	2).	3).	4).
1259 .	132 .	XIII	
1260 .	132 .	„	
1261 .	132 .	„	
1262 .	132 .	„	
1263 .	132 .	„	
1264 .	141 .	„	
1265 .	141 .	„	
1266 .	141 .	„	
1267 .	141 .	„	
1268 .	141 .	„	
1269 .	141 .	„	
1270 .	141 .	„	
1271 .	141 .	„	

TABLOUL NUMELOR[1]

Abason E, 1, 44, 139.
Abel, 62, 63.
Abramescu N, 1, 128, 137, 139.
Abruti T. C. 21.
Adam D. P., 1, 6.
Adamescu M., 1.
Adams S. W., 31.
Ahmes 18.
Adamachi V., 7.
Alaci V., 1, 3, 12, 13, 21, 24, 25, 35, 36, 37, 46, 48, 49, 54, 60, 61, 72, 73, 79, 82, 84, 85, 92, 96, 97, 107, 108, 109, 110, 117, 120, 121, 130 132, 133, 136, 141.
d'Alembert 62, 63, 123.
d'Alembert le Rond T, 88, 89.
Alpenteufer 124.
Amărăşteanu F. M., 104, 106, 118 131, 140, 141.
Amfilochie de Hotin 113.
Anastasescu M., 24, 84, 95, 117
Anaximandru 18.
Andronescu P., 1.
Angelescu A. 1, 139.
Angelescu C. Dr, 109, 110.
Angheluţă Th., 1, 77, 139.
Anițescu N. N., 70.
Antonescu N, 59.
Antoniu V. Emilia 34, 35, 71, 72, 83, 84, 96, 104, 105, 107, 117.
Appel P. 116.
Arbter M., 12, 24, 47, 59, 71, 84, 96, 107, 140.
Ardeleanu Şt., 1.
Arghir I, 1.
Arhire V., 107, 140, 141.
Aryabhata 18.
Asachi G. 115, 124.
Aubert 58.
Băbeanu D. 107, 131.
Babini I. 33.
Bacaloglu E. 126.
Baidaff I. B.. 7, 21, 33, 44, 54, 80, 104, 116, 117.
Baire, 139.
Bakony C., 1.
Balasz D., 1.
Băleanu D., 24, 57, 58, 72, 83, 105, 118.
Băleanu E, 46.
Băleanu D. R., 12, 71.
Ball W. W. 61.
Bănărescu M., 1.
Banciu I., 1
Bănescu N, 127.
Barbelian D., 139.
Bărglăzan A., 1, 21, 72.
Baron C., 1
Barzin M., 139.
Basedow 116.
Baumgartner 124.
Bedron I, 24, 59, 71.
Beleş I., 126.
Belu I. S. T. 71.
Benedek E., 140.
Bercea Cl, 24, 59.
Beniczky L., 70.
Bernoulli D., 61, 113.
Bernoulli I., 61, 115.
Bernoulli N., 102.
Berra S. A. C., 104.
Bertrand I. 116.
Bessel 21.
Bezout 114, 115, 124.
Bhaskara, 18.
Bianu, 110.
Biletchi N., 71, 72, 83, 84, 105, 107.
Birek V., 12, 34, 47, 104.
Blănaru V., 59.
Blaşian V., 1.
Bloch A., 117
Bobârnac M, 1.
Boerescu P. G., 45, 71, 72, 107.
Boeriu V., 82.
Bohr, 139.
Boian I. 131, 140, 141.
Boisnard J., 24, 46, 47, 59, 71, 105, 118.
Bolyłai I., 21, 63.
Bombelli, 123.
Borcea Cl. 59.
Borel E, 44, 116, 129.
Borsuk K., 44.
Boscovich 113, 127.
Botea G. N., 7, 21, 36, 37, 40, 48, 54, 73, 74, 77, 80, 139.
Botez M., 1, 137.
Botez St. M., 91, 120
Bouffier 113.
Bouligand G, 139.
Boutaric A, 128.
Boutroux 129.
Brăiloiu 123.
Brâncoveanu C, 112, 113.
Bratu Gh, 1.
Breazu D, 1.
Breget 52
Brelot M., 44.
Briot 45.
Brisou 114.
Brocard 73, 86.

1) Numerele care urmează după nume, arată paginile în care se găsesc publicate numele.

Brouwer, 139.
Budeanu Ct., 47, 60, 66, 107, 118, 140, 141
Buhancă I., 59.
Buicliu Gh., 1, 6, 44, 50, 55, 56, 60, 66, 68, 70, 81, 82, 84, 90, 91, 92, 96. 97, 102, 104, 108, 120, 127, 128, 132, 133, 141.
Bujoreanu V., 23.
Bungeţeanu D. 110, 126.
Burg 125.
Bushey H., 44.
Butescu 110.
Butty E., 33.

Cabanes 31.
Calcan S., 141.
Cajori Fl., 115.
Calimach Gr., 113, 115.
Câlniceanu C., 1.
Călugăreanu G., 44.
Cândea C., 1.
Cantacuzino C., 112.
Cantacuzino S., 112.
Cantemir Antioh, 113.
Cantemir D., 113.
Capriel H., 44, 54.
Caragea 115.
Caraman I. C., 107, 141.
Caravelli V., 114.
Carnot 40, 74.
Carp Ig., 23, 83, 84, 104.
Cartan E., 139.
Cartan H, 44.
Casolin Şt., 105.
Cassini 112.
Catarina II., 89.
Caton 113.
Catona V., 1, 33.
Cauchy 126, 129, 139.
Caticky 126, 129.
Cavalieri 18, 19.
Cavsocalivite N, 114.
Cayley A. 116.
Cazanacli V. P., 7, 19, 21, 33, 35, 44, 59, 60, 68, 83, 103, 116, 126.
Căzănescu Gr. Ed., 59.
Ceasurescu V., 131, 140, 141.
Cercel N. Kiriac, 113.
Chara 124.
Chinezu 125.
Chiriac P. Ct., 23, 24, 34, 46, 47, 59, 71, 72, 82, 83, 84, 96, 101, 105, 107, 108, 117 118, 120, 130, 131, 140, 141.
Chiriţă M., 7, 12, 23, 24, 33, 34, 47, 58, 71, 72, 83, 84, 94, 96, 104, 105, 106, 130, 140.
Chiu Tr., 107.
Chrystal 116.
Ciancilian A., 104, 118, 140.
Ciorănescu N., 139.
Cişmigiu M., 24, 107.
Claudian V., 46, 132, 141.
Clebsch A., 116.
Climescu C., 125, 126.
Coandă I. V., 12, 23, 24, 34, 35, 45, 47, 57, 58, 60, 70, 71, 72, 83, 84, 93, 94, 95, 96, 104, 105, 107, 108, 117, 118, 130, 131, 140, 141.
Coatu G., 21.
Coca A., 1.
Coculescu 110.
Codreş Fl, 72, 83.
Cogălnicianu M, 125.
Cojocaru M. M., 12, 23, 24, 34, 35, 45, 47, 57, 58, 60, 70, 71, 72, 83, 84, 93, 94, 95, 96, 105, 106, 107, 117, 118, 120, 130, 131, 140.
Coman Al, 46, 47, 71.
Coman Aug., 1, 106.
Comneu I., 113.
Condillac 114.
Constanda Gr, 114.
Constantin P. G., 24, 83, 95, 105.
Constantinescu M., 125.
Constantinescu Gh., 1, 54.
Conta V., 21, 116.
Contrea A., 1.
Contrat 129.
Copernicus 19.
Coridaleu T, 112, 113.
Cornăţeanu Ileana 71, 72.
Coşereanu P., 107, 140, 141.
Cosman Al., 72, 95, 105, 141.
Coşniţă C., 3, 23, 36, 41, 74, 101, 139.
Cosorlui Şt., 83, 84, 140
Costache I. Gh, 47, 71.
Costache V., 115.
Costăchescu D. C, 1.
Costăchescu V. C., 24.
Costinescu A., 124.
Coulin 114.
Cramer 122.
Craveu 127.
Crişan A., 14
Crişan T. I., 47, 95, 96, 107, 119, 140, 141.
Cristari M., 114.
Cristescu I., 1, 21.
Cristescu C. I., 81.
Cristescu V., 54, 127.
Cristodulo N., 1.
Cristopol C., 82.
Crivăţ I. Vl., 23, 69.
Cservény I., 1.
Calianu N., 125.
Curchi I., 12, 23, 24, 34, 36, 45, 57, 58, 60, 70, 71, 72, 83, 84, 94, 95 104, 105, 130.
Cuzin L., 105.
Czihac 124.

Damian P., 112.
Dan T. Tr., 24, 34, 45, 47, 57, 93, 94, 95 105.
Dăscălescu St. H., 45.
Darboux 129.
Davidoglu 110.
Deceanu Gh., 95, 140, 141.
Deheleanu D, 33.
Demetrescu Gh, 1.
Deniş C., 84, 96, 105, 107.
Denjoy A., 44, 139.
Denoël 128.
Desargues 10, 139.
Destouches 88.
Diaconescu D. C., 71.
Diaconescu I. C., 45, 47.
Diaconescu N., 1.
Dima A. Gh., 12, 34, 72, 83, 84, 105, 107, 117.
Dima D. Gh., 24, 47.
Dimitriu At. I., 11.
Dini Al. I., 70.
Dirichlet 44.
Doboş Er, 83, 84
Dolland 113.
Doppler 98.
Drâmbă C., 139.
Duca G, 125.
Duca Vodă 113.
Duhem P., 129.
Dumitrescu P. A., 140, 141.
Dumitrescu T., 33.
Dumitriu-Dada 1, 11, 12, 94, 140.
Dunham Th. 31.

Einstein 98, 100.
Eliad M., 114, 127.
Emilian 126.
Emmanuel David, 110, 126, 127.
Erbiceanu C., 127.
Errera A, 44, 139.
Eschyle 113.
Esope 113.
A. von Ettingshausen 115.
Euclide 62, 63, 112, 113.
Euler L., 61, 62, 63, 102, 115, 116, 117, 123.
Euripide 113.
l'Évangile 113.

Fenichi A., 140.
Ferand Cl., 128.
Feuerbach 33, 104, 128.
Fibonacci 7, 18.
Filipescu Gh. 124.
Fincke T., 19.
Fizeau 98.
Florescu B. I., 7, 139.
Florescu M., 1.
Florus 114.
Focşa D., 110.
Focşeneanu I. M., 21.
Fofiu C., 12, 23, 24, 58, 70, 93.
Forneiu I., 113.
Fotiade L., 114.
Fourcroy 125.
Francoeur 115, 123, 124.
Frăţici I., 1.
Frederic II., 88.
Frederic cel Mare 61.
Fredholm 126, 139.
Frégier 3, 4, 5
Frénicle de Bessy 115.
Freywald 124.
Froda A., 139.
Fuchs, 139.

Gabrielescu E. C., 7.
Galilei 123, 129.
Galois 7, 126.
Gauss 51, 62, 63, 116.
Gavra A. 124.
Gavrilescu Gh., 47, 71.
Georgescu D., 1.
Georgescu N. M., 47, 71.
Georgescu St. St., 24, 47.
Gergonne 86.
Gerstner 124
Ghenea T. Al., 21.
Gheorghe V., 45, 47, 70, 95.
Gheorghiev N., 11.

Gheorghiu Al., 47, 95, 96, 105.
Gheorghiu Dr 110, 111.
Gheorghiu Th. Gh., 80.
Gheorghiu A. S., 139.
Gherardo di Cremona 18.
Ghermănescu M., 1, 21, 139.
Ghermani D., 44.
Ghica Al., 44, 139.
Ghica Gr. Al., 113.
Ghica I., 124.
Ghiocel V. V., 12, 24, 34, 47, 70. 72, 83, 84, 95, 96, 105, 106, 107, 118, 130, 131.
Ghișoiu I. P., 23.
Ghiță I. Tr. 47, 71.
Ghițescu Sp. 1, 32, 33, 98.
Gil I. Valera 7.
Girard 18, 19.
Gobdelas 115.
Godeanu Ig. V., 12, 23, 24, 34, 35, 47, 57, 58, 59, 60, 71, 72, 83, 84, 94, 95, 96, 105, 106, 107, 117, 118, 120, 130, 131, 140, 141.
Godeaux L., 44.
Gogu 110.
Gogu C., 126.
Gogu M., 125.
Golescu Al., 125.
Gonzalez O. M., 91.
Goormaghtigh K. M., 73, 80, 128.
Grama M., 47, 96, 107.
Greundlich E., 100.
Grinberg N. M., 45, 93.
Grumăzescu M., 84, 140, 141.
Gunter 18, 19.

Hamerak C., 11.
Haret Spiru 109, 110, 111, 126.
Hascal I. H., 84, 96, 105, 107.
Hașdeu P. B., 21.
Heraclid Despot I. 112.
Hérigone 18.
Hetca El., 140.
Hirt F., 20.
Hoborski A., 44.
Hommaire Fr., 124.
Honig 125.
Hôpital 43.
Hristea H., 1.
Hristodul At, 114.
Hurmuzescu 110.
Hypomenus Ch., 112,

Iacobescu I. O., 47, 71.
Ichim Ermina 23, 47, 95.
Ilie C. I., 24, 34, 45, 47, 70, 84, 94, 95, 105.
Iliescu Tr. O., 93.
Imecs M., 105.
Ioanin C. Gh., 45.
Ionescu Ct. Bujor 1, 44, 48, 60, 84, 86, 96, 141.
Ionescu D., 140.
Ionescu V. D., 13, 21, 139.
Ionescu Argetoaia C. E., 117, 140, 141.
Ionescu C. E., 24, 34, 46, 47, 71, 72, 83, 84, 96, 105, 106, 118, 120, 130.
Ionescu M. Gh. 47, 71.
Ionescu I., 54, 62, 80, 91, 104, 110, 111, 114, 125, 127, 139.
Ionescu S. Șt., 47, 71, 141.
Ionescu T., 111.
Ionescu Țiu D. C., 11, 23.
Iorga N, 7, 111, 127
Iorgulescu T., 1.
Ipsilanti Al., 114.
Isocrate 113.
Istrati Dr. 126, 127.
Iuga I., 47, 71.
Ivănescu C., 12, 23, 24, 33, 35, 45, 46, 47, 48, 56, 58, 59, 60, 63, 70, 71, 72, 83, 93, 95, 96, 105, 120.

Jacobi 33, 62, 63
Jarett Th., 116.
Jensen 44.
John Șt. 31.
Jora V., 140, 141.
Jordan 52, 116.

Kanelas 115.
Kepler 99.
Kolbe 125.
Kopernic N. 21.
Kraïtchik 44.
Kramp Ch. 116.
Kreiling E., 21.
Kummer 63, 58.
Kymenites S., 112.

Lagrange 61, 62, 63.
Lahovary J., 126.
Lalande 114.
Lalanne L., 125, 127.
Lalescu Tr., 126, 127,
Lambert 63.
Lambrino Gh., 1.
Lamé 80.
Lățea P. C., 12, 23, 24, 34, 35, 36, 46, 47, 57. 60, 70, 71, 72, 82, 83, 84, 93, 95, 105, 107, 108, 118, 119, 132, 140.
Laplace, 139.
Lațiu V., 1.
Lazar G., 123, 127.
Lazarini 124, 127.
Lebădă D., 139, 141.
Ledulx de Sainte Croix 114.
Lefebure de Foury 125.
Legendre M. A., 61, 62, 63, 124, 139.
Leibnitz 115.
Lemaître 98, 99. 100.
Lemoine 73, 85, 86, 114.
Leonida D., 1.
Le Roy 129.
Lesbios V., 115.
Levi G., 137.
Lietzmann W., 20.
Linteș I., 2.
Liteanu Gh., 2, 54.
Lobatchewsky 63.
Lucescu 126
Lupan A. 2.
Lupașcu A. E., 59.
Lupescu G. C., 34, 35, 47, 60, 82. 93, 96. 105, 106, 107, 108, 118, 140.
Lupu V., 112, 113.
Lyman 31.

Maclaurin 29, 66.
Mädler 31.
Magheru I, 2.
Magini 18, 19.
Maiore 63.
Maiorescu I., 127.
Maiorescu T., 111.
Manase 114.
Mănescu C., 125.
Manu G, 127.
Manughevici C., 2.
Marcovici 123, 127.
Marcu S., 123, 127.
Mardan D., 2.
Mărgineanu I., 23 36, 48, 57, 59, 60, 70. 72, 83, 84, 96, 105, 117, 141.
Margulius M., 23, 45, 46, 56, 57, 58, 70, 71, 72, 82, 83, 93, 116.
Mareș T., 46.
Marin Al., 125.
Marineanu Tr., 23.
Marinescu P., 45.
Marioveli 137.
Marnea D., 140.
Marșieu M. T., 81.
Marteș V. Gr, 83, 84, 105, 118, 120, 131, 13', 140, 141.
Martinot 114.
Mârza C. V., 34, 35, 45, 105.
Masaryk 128.
Mașcaș P., 12, 24, 60, 70, 71, 84, 96.
Mateescu Șt., 2.
Matei I., 47.
Matieș I. V., 12, 36, 43, 49, 60, 67, 72, 132, 136, 139, 141.
Mazilu P., 24, 34, 35, 46, 47, 57, 60, 71, 72, 83. 84, 94, 95, 96, 105, 106, 107, 108, 117, 118, 131, 132, 140, 141.
Maupertuis 113.
Mavrocordat N., 113.
Maxwel 31.
Mecu I. I. 12, 34, 35, 47, 96, 105, 120, 131.
Mecu I. M., 118, 132, 140.
Mehedinti D. D., 24 34, 45, 47, 58, 59, 70, 71, 72, 83, 84, 93, 95, 105, 106, 107, 119, 132, 140.
Melik I., 125.
Menelaus 8, 9, 38, 75.
Mereuță Em., 12, 23, 24, 34, 35, 46, 47, 59, 60, 71, 72, 83, 84, 93, 94, 95, 96, 105, 106, 107, 108, 117, 118, 131, 140, 141.
Mériage 114.
Metea G. V., 140.
Metzburg 114.
Micle S., 125.
Mihăileanu N. N., 23, 39, 45, 46, 56, 70, 82, 93, 128.
Mihaiu Em. 2.
Mihalcea N., 24, 71, 96, 105, 107, 130, 140
Mihoc G., 44, 139.
Milea P. E., 34.
Milea E. G, 24.
Milescu N., 112, 127.
Millea P. E., 12, 23, 74, 130, 140, 141.
Millo M., 127.
Milne A. E, 99, 100.
Miloia I., 2.
Milu I. N., 140, 141
Mioc V., 2, 20.
Mircea N. Șt, 139.
Mitache A. 140, 141.
Moesiodax I., 114.

Montel P., 129, 139.
Moore J, 18, 19.
de Morgan Aug., 20, 21.
Moritz E. R. 82.,
Moroiu 123.
Moruzi Al., 114.
Motoc D. M., 23, 24, 36, 45, 46, 56, 57, 58, 70, 71, 82, 93, 95.
Moutard Th., 89.
Movilă P, 112
Mrazec D., 110.
Murgu M., 140.
Musta Șt., 117, 120, 141.

Nadașan Șt., 2, 21, 139.
Nagel 86.
Naneș Cornelia 34, 58, 84, 104.
Naneș Gh., 2.
Negrea A. L. M., 12, 23, 24, 34, 35, 45, 47, 58, 59, 70, 71, 72, 82, 83, 84. 93, 94, 105, 106, 107, 108, 117, 118, 120, 131, 140.
Negreanu D., 126.
Nenciulescu H., 24, 34, 45, 47, 60, 70, 83, 84, 95, 105.
Newton J., 18, 123.
Nichifor Gh., 2.
Nichiforescu Gh., 23.
Nicholson 31.
Nicolaescu Șt., 45, 82.
Nicolau A., 2, 45.
Nicolau P., 2.
Niculescu G., 2, 54.
Niculescu M. 2, 139.
Niculescu V., 47, 71.
Niewenglowski 81, 116.
Nițoiu V. N., 132, 140.
Norwood R., 18.
Notara Hr., 112, 113.
Nuțiu M., 140.
N. M., 82.

Oancea I. Andrei 47, 71.
Ohm M., 115, 116.
Olteanu M., Fl. 47.
Onicescu O., 2, 44, 110, 139.
Orășanu D. C., 127.
Orăscu Al., 125, 126.
Orășeanu C., 2, 44, 54, 104, 110.
Orășeanu Gr. 2.
Oughtred 18, 19.
O. N. T. 11, 23.

Păcuraru P., 48, 140.
Painlaivé P., 129, 139.
Palade D. 112.
Palade V., 126
Panaitescu Șc., 7, 104.
Pandele 123.
Pănescu N., 105.
Pangrati A. E., 126
Pangrati I., 125.
Pănoiu Ed. Em., 45, 95, 105, 130.
Pantazi Al., 44, 54, 139.
Papazian E., 140.
Papelier 58.
Pascu Z., 140, 141.
Pâslariu V., 83, 84, 119, 131, 132.
Pastor Rey T., 33.
Patraulea N. R., 23, 24, 57.
Patron M. P., 105.
Paul E., 7, 11.
Paulian M., 127.
Paulid D., 124, 125.
Păun V. N. 106, 107, 108, 117, 119
Păunescu N., 24, 34, 48, 60, 70, 71 72, 83, 96, 105, 130.
Petre G. C., 34, 70.
Petrescu A., 2.
Petrescu P. A., 132, 140.
Petrescu D., 126.
Petrescu D. I., 71, 140.
Petropol D. Ct., 44.
Pfaff, 13).
Philippide D., 114, 127.
Picard E. 116, 129.
Pico della Mirandola 128.
Pindare 113.
Pitagora 37, 113, 123.
Plato di Tivoli 18.
Plăcinteanu I., 139.
Platon 123,
Poczacky S., 112.
Poenaru P., 123, 124, 125.
Poincaré H., 79, 129.
Poisson 21.
Polya, 139.
Pompeiu D., 7, 44, 109, 110, 111, 139.
Pop Gh. 124
Pop B. I., 45.
Pop G. I. 82.
Pop L. I., 70.
Pop L., 45, 82.
Popa B. I., 24, 36, 48, 59. 71, 72, 83, 84, 93, 105, 107, 108, 118, 130.
Popa Gh. I., 23, 24, 45, 56, 57, 58, 72, 82, 83, 93.
Popa N., 12, 24, 34, 35, 48, 60, 71, 94, 95, 96, 105, 107, 118, 132, 140, 141.
Popa D. Tr., 48, 83, 94, 96, 105, 117.
Pope 124.
Popescu Ad., 24, 34, 35, 60, 71, 72, 84, 96, 105, 106, 107, 108, 118, 120, 130.
Popescu E., 2.
Popescu I., 2.
Popescu N. Maria 107, 117.
Popescu D. N., 23.
Popescu N. P., 70, 82.
Popescu C. Șt., 24, 46, 58, 70, 71, 83, 93, 96, 132.
Popescu Greaca V., 117.
Popovici I., 110.
Popovici I. I., 59.
Popovici T., 68.
Popp I., 125.
Porecki B., 140.
Porumbescu D., 24, 48, 70, 71, 72, 83, 84, 95, 105, 132, 140.
Poteca E., 123.
Potopeanu Gh., 104
Potemkin 114.
Praja V. I., 126.
Preda C. C., 48, 57, 59, 95, 106, 107, 117, 119, 141.
Predescu P. Gh., 47.
Predoescu P. Gh., 71.
Predoescu D. M., 83.
Predoescu I. M., 7, 12, 21. 24, 33, 34, 35, 44, 46, 48, 54, 58, 60. 71, 72, 83, 84, 94, 96, 105, 106, 107, 117, 118, 130, 131, 132, 139, 140.
Predoescu M. Tr., 34, 35, 47, 48, 57, 58, 59, 71, 72, 83, 84, 94, 96, 106, 107, 108, 117. 118, 131, 132, 140, 141
Predoiu Fl., 45.
Procopiescu M., 24, 48, 59, 71, 95, 96, 132, 140.
Protopopescu I, 2.
Psalitis At., 114.
Purcariu I., 2.
Purcel At., 45, 82.
Purdilă A,, 82.
Ptolomeu 58.
Pupezescu I., 119.

Rabe 31.
Racliș N. R., 2, 33, 80
Racoțeanu I., 58, 96.
Racoțeanu I. M., 35, 48, 105.
Rădulescu T. D., 47, 71.
Rădulescu El. I, 123.
Răduleț V. R., 21.
Rhaeticus 18, 19.
Ragalschi E., 83, 84, 96, 105.
Rallet J., 125.
Reghiș P.. 70.
Regimontanus 18.
Rezeanu P. M., 24, 93, 96.
Rheticus 112.
Ribot 79.
Rivard 114.
Rogojan Al., 24, 48, 105.
Roibănescu C., 2.
Romanul 113.
R ndelt 124.
Roșca St. Veronica 24, 47, 70, 71, 82, 83. 84, 96, 119.
Rosenblatt A., 33.
Rostand J., 128.
Roșu Al., 128.
Rousseau 88.
Ruffini P. 116.
Rusu D. C., 23, 82.
Rusu Gh., 141.
Rusu L., 23.
Ruzievicz S., 44.

Sacherri 63.
Saegiu E., 2.
Salamon 124.
Saligny A., 33.
Salmon G., 116.
Sâmbotin Gh., 12, 23, 24, 34, 35, 46, 47, 71, 72, 83, 84, 95, 96, 105, 107, 108, 117.
Sandovici S., 71, 72.
Sandovici V., 24, 34, 35, 48, 83, 84, 95, 96, 105, 106, 140.
Sandu I. O., 71.
Săndulescu I. I., 12. 46, 48, 71, 72, 83, 84, 93, 106, 107, 108, 117, 118, 120, 132, 140, 141.
Sân-Petru L. D., 47, 71.
Santto F. G, 24, 34, 48, 71, 84, 95, 96, 105.
Sauciuc L., 2.
Saulescu G., 124.
Savin C. I., 58, 71, 81, 83 130.
Savovici Fl., 45.
Scarbourgh 18, 19.

Scarlatescu I. 140.
Schileru I. D., 2, 60.
Şchiopul P., 112.
Schneller C., 59.
Schoenberg E., 31, 32.
Schöter 85.
Schülke A., 14.
Schuller D. 23.
Schur 139.
Scodreanu Al., 33.
Secăroiu D., 132, 140, 141.
Segărceanu M., 24, 34, 105, 117, 132, 140, 141.
Şerban T., 45.
Serbu C., 140, 141.
Sergescu P., 2, 7, 21, 110, 111, 123, 128, 129, 139.
Severineanu C., 2.
Sfârleză P., 45.
Shohat J., 44.
Sierpinski W., 44, 139.
Silbermann 44.
Simionescu D. Gh., 132.
Simpson Th., 6, 66, 67.
Simson R., 6.
Şi cai G., 113.
Şiora I. V., 47.
Sitter W., 98, 100.
Sm ghelschi O., 2.
Smith E. D., 18.
Soare I. I., 34, 47, 95.
Solovici A. 140.
Sommer J., 112.
Sova-Grigoreni I., 70.
Stamati I., 114.
Stamati T., 124.
Stambuleanu A., 2.
Stamper 124.
Stan I. A., 120.
Stan C., 6, 12.
Stan I., 45.
Stan M., 57, 93.
Stăncescu C., 2, 21.
Stanciu Şt., 47, 71.
Stănescu M. E., 34, 35, 58, 59, 60, 83, 94, 107, 118, 131.
Stănescu I., 107, 140, 141.
Stantzel E., 2.
Stavrat G., 21.
Stere 128.
Ştefănescu A., 23, 24, 34, 57, 70, 105, 118.
Ştefănescu I. I., 34, 47, 71.
Ştefănescu O., 2.
Stern M. N., 12, 24, 34, 48, 60, 71, 84.
Stirbey B., 125.
Stoica N. D., 119.
Stoica I., 24, 34, 35, 60, 71, 84, 94, 105, 106, 107, 118, 132, 140.
Stoica G. I., 107.
Stoicescu I. E., 70.
Stoicescu L., 2, 21.
Stoicescu M., 2.
Stoilov S., 110, 139.
Straligos A., 112.
Sturm 58, 139.
Sturza M., 115, 124.
Sudan G., 139.
Süli M., 24, 46, 48, 58, 70, 71, 83, 84, 93, 95, 105, 132.
Şuşală I. Gh., 83, 84, 105, 132, 140, 141.
Sylvester J. J., 116.

Tachella G., 91.
Tales 123.
Tannery 129.
Ţarălungă D., 48, 57, 59, 95, 96, 105, 106, 107, 117, 119, 140.
Tartaglia 123.
Taylor 80.
Tchebycheff 44.
Teodorescu C., 2, 3, 13, 21, 25, 37, 49, 61, 73, 85, 97, 109, 121, 133, 139.
Teodorescu D., 44.
Teodorescu Şt., 23.
Teodosiu A., 2.
Teoharide L., 24, 34, 47, 72, 83, 93, 94, 105, 117, 131.
Teotokis N., 113.
Teubner Ed., 14.
Thales 18.
Thébault V., 33, 36, 37, 48, 73, 80, 84, 85, 86, 95, 96, 101, 104, 108, 116, 120, 127, 132.
Theodoriu L., 44, 139.
Theodoresco N., 139.
Tica P. M., 23, 24, 34, 45, 47, 58, 70, 71, 83, 84, 93, 94, 105, 106, 108, 118, 130, 140, 141.
Ţino O., 2, 44, 54.
Ţiţeica G., 44, 109, 110, 111, 127, 139.
Todhunter 116.
Toma I. I., 71.
Toma S. I., 47.
Toni M., 125.
Toussaint M., 24.
Trécourt Baptist J., 114.
Trica S. I., 23, 24, 34, 35, 45, 46, 56, 58, 60, 70, 71, 72, 83, 84, 93, 105.
Trifănescu I. I., 24, 34.
Trişcă I., 46.
Tutunaru D., 140

Ursoiu G. 108.

Vâlceanu N. I., 11, 21, 23, 108.
Vâlcovici V., 2, 33, 44, 109, 139.
Vandermonde 82, 116.
Vancai I., 140, 141.
Vardalah 114.
Vârgolici 125.
Vasilescu Karpen 110.
Vasiliu-Leoben Gh., 2, 12, 24, 34, 35, 46, 48, 50, 71, 72, 83, 84, 93, 95, 105, 106, 107, 108, 117, 118, 141.
Vasu N., 47.
Veniamin Costache 115.
Vetter R., 21.
Vidraşcu G. I., 52.
Viet 123.
Vieta 18, 19.
Visa Eug., 132.
Vlad 113.
Vlad V., 2.
Volterra 126.
Vonica I., 47.
Vranceanu G., 139.
Vuibert 73.
Vulcan S., 117.
Vuntejanu C.,

Wallis 18, 19, 115.
Weierstrass 126.
Wefa Abu'l 19.
Wengirski 114.
Wili 114

Zăgănescu I., 2
Zaharia D. Ct., 47, 71.
Zaharia O. N., 79, 91, 129.
Zamfir D., 45, 70.
Zapan Gr. 2.
Zefirescu I., 124.
Zervos 89.

Tabla de Materie a fost întocmită de d-nii: *Col. Gh. Buicliu* şi *Prof. V. Mioc,* cărora Redacţia le aducem vii mulţumiri.

Rugăm pe corespondenţii noştrii, a trimite de urgenţă costul abonamentului de 100 (una sută) lei, pentru „R. M. T." pe anul XIV, care începe la 15 Martie 1933.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

REVISTA MATEMATICA DIN TIMI[illegible]OARA — VOL. XIII.

5 lei